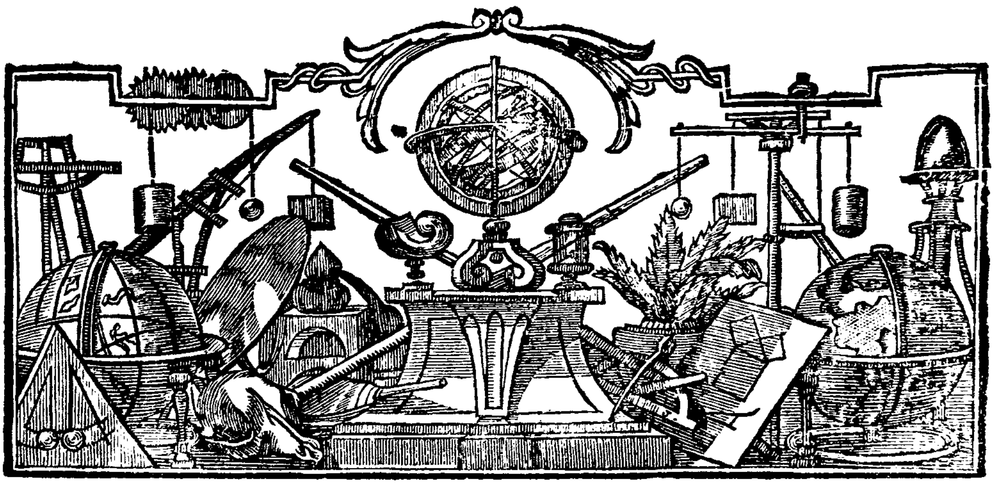

ESSAI

SUR

L'APPLICATION DE L'ANALYSE

À LA PROBABILITÉ DES DÉCISIONS

Rendues à la pluralité des voix.

CET Ouvrage ſera diviſé en cinq parties.

Dans la première, on ſuppoſe connue la probabilité du jugement de chaque Votant, & on cherche la probabilité de la déciſion rendue à la pluralité des voix dans un grand nombre d'hypothèſes : d'abord en ne conſidérant qu'une ſeule aſſemblée qui ne vote qu'une fois ; enſuite, en ſuppoſant que la même aſſemblée revienne aux voix juſqu'à ce que l'on ait obtenu la pluralité exigée ; en faiſant dépendre la déciſion, du jugement combiné de plusieurs assemblées ; en supposant ou qu'on délibère seulement entre une proposition & sa contradictoire, ou qu'on délibère entre trois propositions, ou enfin qu'on choisit, soit entre plusieurs hommes, soit entre plusieurs objets dont il faut déterminer le degré de mérite.

Dans la seconde partie, on supposera au contraire qu'on connoît ou la probabilité qui résulte du jugement d'une assemblée donnée, ou celle qu'on doit exiger dans une décision, & on s'occupera de déterminer, soit la probabilité du suffrage de chaque Votant, soit l'hypothèse de pluralité qu'il faut choisir.

Dans la troisième, on cherchera une méthode pour s'assurer à *posteriori* du degré de probabilité d'un suffrage ou de la décision d'une assemblée, & pour déterminer les degrés de probabilité que doivent avoir les différentes espèces de décisions.

Dans la quatrième, on donnera le moyen de faire entrer dans le calcul l'influence d'un des Votans sur les autres, la mauvaise foi qu'on peut leur supposer, l'inégalité de lumières entre les Votans & les autres circonstances auxquelles il est nécessaire d'avoir égard pour rendre la théorie applicable & utile.

La cinquième renfermera l'application des principes précédens à quelques exemples

PREMIÈRE PARTIE.

Nous ſuppoſerons d'abord que tous ceux qui donnent leurs voix, ont une égale ſagacité, une égale juſteſſe d'eſprit dont ils ont fait également uſage, qu'ils ſont tous animés d'un égal eſprit de juſtice enfin que chacun d'eux a voté d'après lui-même, comme il arriveroit ſi chacun prononçoit ſéparément ſon avis, ou, ce qui revient au même, que dans la diſcuſſion chacun n'a eu ſur l'opinion d'aucun autre une influence plus grande que celle qu'il en a reçue lui-même.

Nous nous propoſons d'examiner dans la ſuite, comment on peut faire entrer dans le calcul la différence de ſagacité ou de juſteſſe d'eſprit des Votans, les effets de la partialité & l'influence d'un des Votans ſur les autres.

Nous ſuppoſerons en général que v repréſente le nombre de fois que l'opinion d'un des Votans doit être conforme à la vérité, & e le nombre de fois qu'elle doit être contraire à la vérité ſur un nombre $v + e$ de déciſions; & pour abréger, nous ſuppoſerons $v + e = 1$ en général. Cela poſé, regardant v & e comme des quantités connues, nous chercherons d'abord la probabilité qui en réſulte en faveur de la vérité pour un nombre quelconque de Votans dans les différentes hypothèſes de pluralité que l'on peut choiſir.

PREMIÈRE HYPOTHÈSE.

Le nombre des Votans eſt $2q + 1$, & l'on cherche la probabilité de la pluralité d'une ſeule voix.

Soit la probabilité qu’il y aura au moins une seule voix de plus en faveur de la vérité, exprimée par V^q, & la probabilité qu’il y aura au moins une seule voix de plus en faveur de l’erreur, exprimée par E^q. nous aurons

$$V^q = v^{2q+1} + \frac{2q+1}{1} v^{2q} e + \frac{2q+1}{2} v^{2q-1} e^2 \dots + \frac{2q+1}{q} v^{q+1} e^q$$

$$\& \ E^q = e^{2q+1} + \frac{2q+1}{1} e^{2q} v + \frac{2q+1}{2} e^{2q-1} v^2 \dots + \frac{2q+1}{q} e^{q+1} v^q$$

$\frac{2q+1}{q}$ désigne ici le coëfficient de $v^{q+1} e^q$ dans $(v+e)^{2q+1}$ & en général $\frac{n}{m}$ désignera le coëfficient de $v^{n-m} e^m$ dans $(v+e)^n$; cette notation sera conservée dans tout cet Ouvrage. L’on aura ici $V + E = 1$. Mais il sera facile de mettre la fonction V^q sous une forme plus commode. Pour cela, supposons q augmenté d’une unité, nous avons évidemment,

$$V^{q+1} = v^{2q+3} + \frac{2q+3}{1} v^{2q+2} e + \frac{2q+3}{2} v^{2q+1} e^2 \dots + \frac{2q+3}{q+1} v^{q+2} e^{q+1}.$$

Comparant cette valeur avec celle de V^q, & multipliant celle-ci par $(v+e)^2 = 1$, ce qui n’en change pas la valeur, nous aurons

$$V^q = v^{2q+3} + \begin{matrix} \frac{2q+1}{1} \\ +2 \end{matrix} v^{2q+2} e + \begin{matrix} \frac{2q+1}{2} \\ +2 . \frac{2q+1}{1} \\ +1 \end{matrix} v^{2q+1} e^2 \dots + \begin{matrix} \frac{2q+1}{q-1} \\ +2 . \frac{2q+1}{q-2} \\ + \frac{2q+1}{q-3} \end{matrix} v^{q+4} e^{q-1}$$

$$+ \begin{matrix} \frac{2q+1}{q} \\ +2 . \frac{2q+1}{q-1} \\ + \frac{2q+1}{q-2} \end{matrix} v^{q+3} e^q \begin{matrix} +2 \frac{2q+1}{q} \\ + \frac{2q+1}{q-1} \end{matrix} v^{q+2} e^{q+1} + \frac{2q+1}{q} v^{q+1} e^{q+2};$$

or il aiſé de voir qu'en général $\frac{2q+1}{q'} + 2.\frac{2q+1}{q'-1} + \frac{2q+1}{q'-2}$ eſt le coëfficient de $v^{2q+3-q'}e^{q'}$ dans $(v+e)^{2q+1}.(v+e)^2$, & par conſéquent eſt égal à $\frac{2q+3}{q'}$. Subſtituant donc cette valeur dans les coëfficiens de la valeur que nous venons de trouver pour (V^q), & mettant à la place de $2.\frac{2q+1}{q} + \frac{2q+1}{q-1}$ ſa valeur $\frac{2q+3}{q+1} - \frac{2q+1}{q+1}$, nous aurons

$$V^q = v^{2q+3} + \frac{2q+3}{1} v^{2q+2} e + \frac{2q+3}{2} v^{2q+1}.e^2 \dots + \frac{2q+3}{q+1} v^{q+2} e^{q+1} - \frac{2q+1}{q+1} v^{q+2} e^{q+1} + \frac{2q+1}{q} v^{q+1}.e^{q+2};$$

d'où nous tirerons

$$V^{q+1} - V^q = \frac{2q+1}{q+1} v^{q+2}.e^{q+1} - \frac{2q+1}{q} v^{q+1}e^{q+2},$$

& à cauſe de

$$\frac{2q+1}{q+1} = \frac{2q+1}{q};\ V^{q+1} - V^q = \frac{2q+1}{q} v^{q+1}.e^{q+1} \times (v-e),$$

formule d'où l'on tirera

$$V^q = v + (v-e) \times \left[ve + \left(\frac{3}{1}\right) v^2 e^2 + \left(\frac{3}{2}\right) v^3 e^3 + \left(\frac{7}{3}\right) v^4 e^4 \dots + \frac{2q-1}{q-1} v^q e^q\right].$$

Si maintenant nous appelons Q le dernier terme de V^q, & Q' le dernier terme de V^{q+1}, nous aurons $Q = \frac{2q-1}{q-1} v^q e^q$. $Q' = \frac{2q+1}{q} v^{q+1}.e^{q+1}$, d'où $Q' = Q.\frac{2q+1.2q}{q+1.q}$ $ve = Q.\frac{4q^2+2q}{q^2+q} ve$; mais à cauſe de $v + e = 1$

$v\,e < \frac{1}{4}$ & $\frac{4q^2 + 2q}{q^2 + q} < 4$; donc $Q' < Q$; donc la férie qui repréfente V^q, eft une férie convergente quels que foient $v\,e$ & q; mais lorfque q eft grand, v & e reftant les mêmes, le rapport de Q à Q' approche beaucoup de $4\,v\,e$; en forte que fi $v\,e$ n'eft pas fort différent d'un quart, la férie devient très-peu convergente après un certain nombre de termes.

Ainfi, par exemple, lorfque $v > e$, la probabilité pour que la décifion foit conforme à la vérité, augmentera fans ceffe, en augmentant le nombre des Votans; mais fi v n'eft pas très-grand par rapport à e, & que par conféquent $4\,v\,e$ diffère peu de l'unité, ces accroiffemens dans la valeur de v^q feront très-lents; au lieu que la convergence fera tres-prompte fi $4\,v\,e$ eft une petite fraction.

Si nous cherchons maintenant la valeur de E^q, nous trouverons par la même méthode,

$$E^q = e + (e - v)\left[v\,e + \left(\tfrac{3}{1}\right) v^2 e^2 \ldots + \frac{2q-1}{q-1} v^q e^q\right];$$

d'où il réfulte, 1.° $V^q + E^q = 1$, comme cela doit être; 2.° E^q diminuant toujours lorfque $v > e$.

Si au contraire $e > v$, V^q ira toujours en diminuant lorfque q augmente, & E^q augmentera de manière que les accroiffemens de l'un de ces termes feront toujours égaux aux décroiffemens de l'autre.

Cette première obfervation nous conduit d'abord à cette conféquence, que plus le nombre des Votans fera grand, plus il y a de probabilité que leur décifion fera contraire à la vérité lorfque $e > v$, c'eft-à-dire lorfqu'il y a probabilité que chacun en particulier fe trompera; & fi q eft très-grand, cette probabilité pourra devenir très-grande, quoique la différence entre v & e foit très-petite.

Or cette hypothèfe de $e > v$ n'eft point abfurde; il y a un grand nombre de queftions importantes compliquées, ou foumifes à l'empire des préjugés & des paffions, fur lefquelles il eft probable qu'un homme peu inftruit prendra une opinion erronée. Il y a donc un grand nombre de points ſur leſquels il arrivera que plus on multipliera le nombre des Votans, plus il y aura lieu de craindre d'obtenir, à la pluralité, une déciſion contraire à la vérité; en ſorte qu'une conſtitution purement démocratique ſera la plus mauvaiſe de toutes pour tous les objets ſur leſquels le peuple ne connoîtra point la vérité.

Le ſeul moyen de remédier à cet inconvénient, ſans nuire au droit du peuple, ſeroit, lorſqu'il eſt queſtion de faire une loi ſur quelqu'un de ces objets, d'accorder à un corps d'hommes éclairés la prérogative de propoſer la loi, & de donner à cette loi la ſanction dont elle a beſoin, en demandant à l'aſſemblée populaire, non ſi la loi eſt utile ou dangereuſe, mais s'il ne s'y trouve rien de contraire à la juſtice, aux premiers droits des hommes; encore ce remède ne peut-il être utile qu'en ſuppoſant dans chaque Votant de la bonne foi, la plus grande confiance en ſes chefs, & une connoiſſance aſſez nette des principes de la juſtice, pour que de vaines ſubtilités ne puiſſent pas l'ébranler. Une démocratie pure ne peut donc être bonne que pour un peuple très-inſtruit, c'eſt-à-dire, tel qu'il n'en a encore exiſté aucun, du moins parmi les grands peuples.

Dans toût autre cas la forme démocratique ne doit embraſſer que les objets ſur leſquels les hommes non inſtruits peuvent prononcer en connoiſſance de cauſe, comme ceux qui intéreſſent la ſûreté perſonnelle, ceux où un intérêt perſonnel direct & évident, peut dicter le jugement. La démocratie ſeroit encore déſavantageuſe dans les pays où l'utilité publique exigeroit de grandes réformes dans les principes de la légiſlation, de l'adminiſtration, du commerce. Ce que nous diſons ici doit s'entendre également des aſſemblées très-nombreuſes, & il ſeroit facile d'en donner des exemples.

Reprenons maintenant la formule

$$V^q = v + (v - e)\left[ve + \left(\tfrac{3}{1}\right)(ve)^2 \ldots + \frac{2q-1}{q-1}\cdot(ve)^q\right].$$

Il eſt aiſé de voir que le coëfficient d'un terme $(ve)^{q'}$.

ſe formera en multipliant celui du terme précédent par $\frac{(2q'-1).2}{q'}$; ſi nous conſidérons maintenant la formule $(1 - 4z)^{-\frac{1}{2}}$ nous trouverons que les coëfficiens de cette ſérie ſuivent la même loi, en ſorte que le coëfficient de $z^{q'}$, ſera égal au coëfficient de $z^{q'-1}$, multiplié par $\frac{(2q'-1).2}{q'}$. Faiſant donc $ve = z$, nous aurons notre ſérie $z + (\frac{3}{1})\, z^2 \ldots\ldots + \frac{2q-1}{q}\, z^q$, répondant terme à terme à ceux de la ſérie $a + b\,(1 - 4z)^{-\frac{1}{2}}$. a & b ne contenant point z; en effet, puiſque le ſecond terme de notre ſérie eſt donné par le premier, il ſuffit de produire l'égalité pour les coëfficiens de $v\,e^0$ & de $v\,e$ pour que tous les termes ſoient égaux chacun à chacun.

Mais le coëfficient de $v\,e^0$ eſt o dans notre formule, condition qui donne $a + b = 0$; celui de $v\,e$ eſt 1, ce qui donne $2\,b = 1$; donc $b = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{2}$, & notre formule répondra terme à terme à la fonction $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,(1 - 4z)^{-\frac{1}{2}}$ réduite en ſérie.

Donc lorſque $q = \frac{1}{0}$, notre formule ſera égale à $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,(1 - 4z)^{-\frac{1}{2}}$; donc nous aurons $V^q = v + (v - e) \times [-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,(1 - 4ve)^{-\frac{1}{2}}]$; & réduiſant cette fonction en une fonction de e ſeulement, c'eſt-à-dire, y faiſant $v = 1 - e$, elle deviendra

$$1 - e + (1 - 2e) \times [-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(1 - 4e + 4ee)^{-\frac{1}{2}}] = 1,$$

à cauſe de $(1 - 4e + e^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-2e}$,

& de $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-2e} = \frac{e}{1-2e}$.

Ainſi, non-ſeulement la ſérie qui repréſente V^q eſt toujours croiſſante, & de plus en plus convergente, mais même elle approche

approche continuellement de l'unité qui eſt ſa véritable limite ; d'où il réſulte que lorſque $v > e$ on peut, en multipliant le nombre des Votans, avoir une probabilité auſſi grande que l'on voudra, que la déciſion ſera conforme à la vérité.

Reprenons encore notre ſérie.

$$ve + (\tfrac{3}{1})(ve)^2 + (\tfrac{5}{2})(ve)^3 \ldots + \frac{2q-1}{q-1}(ve)^q;$$

& mettant $e - e^2$. à la place de ve, cherchons à la réduire en ſérie par rapport à e.

Si $q = 1$, elle ſera $e - e^2$; ſi $q = 2$, elle deviendra $e + 2e^2 - 6e^3 + 3e^4$; ſi $q = 3$, elle deviendra $e + 2e^2 + 4e^3 - 27.e^4 + 30e^5 - 10e^6$; & en général $e + 2e^2 + 4e^3 + 8e^4 \ldots\ldots = e\frac{1}{1-2e}$ lorſque q eſt $\frac{1}{0}$, comme nous l'avons trouvé ci-deſſus. En effet, il eſt aiſé de voir que le coëfficient d'une puiſſance quelconque q' de e juſqu'à q excluſivement, ſera

$$\frac{2q'-1}{q'-1} - \frac{q'-1}{1}\,\frac{2q'-3}{q'-2} + \frac{q'-2}{2}\,.\,\frac{2q'-5}{q'-3} - \frac{q'-3}{3}\,\frac{2q'-7}{q'-4}\ldots\ldots = 2^{q'-1},$$

& les termes ſupérieurs à q ſeront exprimés de la même manière, moins les coëfficiens des termes du même degré que fourniroient les termes $\frac{2q+1}{q}(ve)^{q+1}$, $\frac{2q+3}{q+1}(ve)^{q+2}$; ce qui conduit au même réſultat par une route plus directe. Comme nous avons ici $V^q + E^q = 1$, il eſt clair que lorſque $V^{\frac{1}{0}} = 1$, $E^{\frac{1}{0}} = 0$, & que par conſéquent lorſque $v < e$, $V^{\frac{1}{0}}$ devient auſſi zéro ; & comme V^q eſt fonction de v comme E^q l'eſt de e, il eſt clair que lorſque $v = e$, $V^q = E^q$, ce qui donne $V^q = \frac{1}{2}$, $E^q = \frac{1}{2}$, quel que ſoit q, & par conſéquent $V^{\frac{1}{0}} = E^{\frac{1}{0}} = \frac{1}{2}$; mais ſi l'on veut déduire cette concluſion des formules en z ci-deſſus, on peut rencontrer quelques difficultés qu'il ne ſera pas inutile de développer

B

ici. 1.° la formule $(1-4ev)^{-\frac{1}{2}}$ doit reſter la même, ſoit que $v>e$ ou $e>v$; ainſi on aura dans le premier cas, où $e<v$ $(1-4ev)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-2e}$, ou $\frac{1}{2v-1}$; donc lorſque $e>v$, elle doit devenir $\frac{1}{2e-1}$; donc la valeur de $V^{\frac{1}{0}}$, dans ce cas, deviendra o. Il en eſt de même de la ſérie en e ci-deſſus; il eſt clair qu'elle eſt $\frac{1}{1-2e}$, mais $e<v$; donc lorſque $e>v$, elle devient $\frac{1}{1-2v} = \frac{1}{2e-1}$. 2.° Lorſque $v=e$, il eſt clair que c'eſt le point où la valeur de V^q paſſe de la valeur 1 à la valeur o; ſuppoſons donc ici v augmenté de ∂v, e diminué de ∂v par conſéquent, & que V^q devienne $V^q + \partial V^q$; ſi on ſuppoſe v diminué de ∂v, & e par conſéquent augmenté de ∂v, V^q deviendra $V^q - \partial V^q$; mais par l'hypothèſe $V^q + \partial V^q = 1$, & $V^q - \partial V^q = 0$; donc $\partial V^q = \frac{1}{2}$, & $V^q = \frac{1}{2}$.

Les formules ci-deſſus V^q & E^q repréſentent les probabilités d'une déciſion conforme ou contraire à la vérité, lorſque cette queſtion n'eſt pas encore décidée; mais ſi elle l'eſt, & que la pluralité à laquelle elle a été rendue ſoit connue, on peut demander quelle eſt la probabilité de la déciſion pour un homme intéreſſé à la queſtion, & qui n'a que ce moyen de la juger.

Suppoſons donc le nombre des Votans $2q+1$ comme ci deſſus, & que l'on ſache que la pluralité ait été de q', en ſorte que $2q+1-z = z+q'$, & par conſéquent $2z = 2q+1-q'$, $z = q+\frac{1-q'}{2}$; ainſi comme z eſt un nombre entier, il faut que q' ſoit impair, ou $=2q''+1$; on aura dans ce cas le nombre des combinaiſons en faveur de la vérité, exprimé par $\frac{2q+1}{q-q''}\, v^{q+q''+1} e^{q-q''}$, & en faveur de l'erreur par $\frac{2q+1}{q-q''}\, v^{q-q''} e^{q+q''+1}$. Le nombre