Erster Abschnitt.

Die einfachen Verknüpfungen extensiver Grössen.

Kap. 1. Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Theilung extensiver Grössen.

§. 1. Begriffe und Rechnungsgesetze.

1. Erklärung. Ich sage, eine Grösse a sei aus den Grössen b, c,⋯ durch die Zahlen $\beta, \gamma, \cdots$ abgeleitet, wenn

$$a = \beta b + \gamma c + \cdots$$

ist, wo $\beta, \gamma, \cdots$ reelle Zahlen sind, gleichviel ob rational oder irrational, ob gleich null oder verschieden von null. Auch sage ich, a sei in diesem Falle numerisch abgeleitet aus b, c,⋯

2. Erklärung. Ferner sage ich, dass zwei oder mehrere Grössen a, b, c⋯ in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, oder dass der Verein der Grössen a, b, c,⋯ einer Zahlbeziehung unterliege, wenn irgend eine derselben sich aus den übrigen numerisch ableiten lässt, also wenn sich z. B.

$$a = \beta b + \gamma c + \cdots$$

setzen lässt, wo $\beta, \gamma, \cdots$ reelle Zahlen sind. Besteht der Verein nur aus Einer Grösse a, so soll nur in dem Falle gesagt werden, der Verein unterliege einer Zahlbeziehung, wenn $a = 0$ ist. Wenn zwei Grössen a und b, von denen keine null ist, in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so bezeichne ich dies durch

$$a \equiv b,$$

und sage a sei kongruent b.

Anmerkung. Zwei reelle Zahlen stehen also immer, zwei verschieden benannte Grössen stehen nie in einer Zahlbeziehung zu einander. Null ist aus jeder Grössenreihe numerisch ableitbar, nämlich durch die Zahlen o, o,··· Mehrere Grössen also, unter denen eine null ist, stehen stets in einer Zahlbeziehung zu einander.

Das Zeichen ($\equiv$) ist in ähnlichem Sinne von Möbius (in seinem barycentrischen Calcül) gebraucht. Die Benennung (kongruent) gründet sich auf geometrische Betrachtungen. Zur Bezeichnung abstrakter Beziehungen ist sie von Gauss gebraucht.

3. Erklärung. Einheit nenne ich jede Grösse, welche dazu dienen soll, um aus ihr eine Reihe von Grössen numerisch abzuleiten, und zwar nenne ich die Einheit eine ursprüngliche, wenn sie nicht aus einer anderen Einheit abgeleitet ist. Die Einheit der Zahlen, also die Eins, nenne ich die absolute Einheit, alle übrigen relative. Null soll nie als Einheit gelten.

4. Erklärung. Ein System von Einheiten nenne ich jeden Verein von Grössen, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und welche dazu dienen sollen, um aus ihnen durch beliebige Zahlen andere Grössen abzuleiten.

Anmerk. Hierher gehört auch der Fall, wo der Verein nur aus einer Einheit besteht (die jedoch nach Nr. 3 nicht null sein darf).

5. Erklärung. Extensive Grösse nenne ich jeden Ausdruck, welcher aus einem Systeme von Einheiten (welches sich jedoch nicht auf die absolute Einheit beschränkt) durch Zahlen abgeleitet ist, und zwar nenne ich diese Zahlen die zu den Einheiten gehörigen Ableitungszahlen jener Grösse; z. B. ist das Polynom

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots, \text{ oder} \sum \alpha e \text{ oder} \sum \alpha_r e_r$$

wenn $a_1, a_2, \cdots$ reelle Zahlen sind, und $e_1, e_2, \cdots$ ein System von Einheiten bilden, eine extensive Grösse, und zwar ist dieselbe aus den Einheiten $e_1, e_2, \cdots$ durch die zugehörigen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ abgeleitet. Nur wenn das System blos aus der absoluten Einheit (1) besteht, ist die abgeleitete Grösse keine extensive, sondern eine Zahlgrösse. Den Ausdruck Grösse überhaupt werde ich nur für diese beiden Gattungen derselben festhalten. Wenn die extensive Grösse aus den ursprünglichen Einheiten abgeleitet werden kann, so nenne ich jene Grösse eine extensive Grösse erster Stufe.

Anmerk. Aus der Elementarmathematik setzen wir die Rechnungsgesetze für Zahlen, und auch für die sogenannten „benannten Zahlen", d. h. für die aus Einer Einheit abgeleiteten extensiven Grössen voraus; jedoch nur für den Fall, dass jene Einheit eine ursprüngliche ist.

6. Erklärung. Zwei extensive Grössen, die aus demselben System von Einheiten abgeleitet sind, addiren, heisst, ihre zu denselben Einheiten gehörigen Ableitungszahlen addiren, d. h.

$$\sum \overline{\alpha e} + \sum \overline{\beta e} = \sum \overline{(\alpha + \beta)\, e}$$

7. Erklärung. Eine extensive Grösse von einer andern, aus demselben Systeme von Einheiten abgeleiteten subtrahiren, heisst die Ableitungszahlen der ersteren von den zu denselben Einheiten gehörigen Ableitungszahlen der letzteren subtrahiren, d. h.

$$\sum \overline{\alpha e} - \sum \overline{\beta e} = \sum \overline{(\alpha - \beta)\, e}$$

Anmerk. In Bezug auf die Klammerbezeichnung halte ich die Bestimmung fest, dass ein ohne Klammern geschriebenes Polynom oder Produkt aus mehreren Faktoren gleichbedeutend ist dem mit Klammern geschriebenen Ausdruck, in welchem alle Klammern gleich zu Anfang eintreten, also $a + b + c = (a + b) + c$, $abc = (ab)\, c$ u. s. w.

8. Erklärung. Für extensive Grössen a, b, c gelten die Fundamentalformeln:

$$\begin{aligned}
&1)\; a + b = b + a,\\
&2)\; a + (b + c) = a + b + c,\\
&3)\; a + b - b = a,\\
&4)\; a - b + b = a.
\end{aligned}$$

Beweis. Es sei $a = \sum \overline{\alpha e}$, $b = \sum \overline{\beta e}$, $c = \sum \overline{\gamma e}$, so ist

$$\begin{aligned}
1)\; a + b &= \sum \overline{\alpha e} + \sum \overline{\beta e} = \sum \overline{(\alpha + \beta) e} && \text{[nach 6].}\\
&= \sum \overline{(\beta + \alpha) e} = \sum \overline{\beta e} + \sum \overline{\alpha e} && \text{[6].}\\
&= b + a.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)\; a + (b + c) &= \sum \overline{\alpha e} + \left(\sum \overline{\beta e} + \sum \overline{\gamma e}\right)\\
&= \sum \overline{\alpha e} + \sum \overline{(\beta + \gamma) e} && \text{[6].}\\
&= \sum \overline{(\alpha + (\beta + \gamma))\, e} && \text{[6].}\\
&= \sum \overline{(a + \beta + \gamma)\, e}\\
&= \sum \overline{(\alpha + \beta) e} + \sum \overline{\gamma e} && \text{[6].}\\
&= \sum \overline{\alpha e} + \sum \overline{\beta e} + \sum \overline{\gamma e} && \text{[6].}\\
&= a + b + c
\end{aligned}$$

*

$$
\begin{aligned}
3)\ \mathrm{a}+\mathrm{b}-\mathrm{b} &= \sum\overline{\alpha \mathrm{e}}+\sum\overline{\beta \mathrm{e}}-\sum\overline{\beta \mathrm{e}} && \\
&= \sum\overline{(\alpha+\beta)\mathrm{e}}-\sum\overline{\beta \mathrm{e}} && [6]. \\
&= \sum\overline{(\alpha+\beta-\beta)\mathrm{e}} && [7]. \\
&= \sum\overline{\alpha \mathrm{e}}=\mathrm{a} && \\
4)\ \mathrm{a}-\mathrm{b}+\mathrm{b} &= \sum\overline{\alpha \mathrm{e}}-\sum\overline{\beta \mathrm{e}}+\sum\overline{\beta \mathrm{e}} && \\
&= \sum\overline{(\alpha-\beta)\mathrm{e}}+\sum\overline{\beta \mathrm{e}} && [7]. \\
&= \sum\overline{(\alpha-\beta+\beta)\mathrm{e}} && [6]. \\
&= \sum\overline{\alpha \mathrm{e}}=\mathrm{a} &&
\end{aligned}
$$

9. Für extensive Grössen gelten die sämmtlichen Gesetze algebraischer Addition und Subtraktion.

Beweis. Denn diese Gesetze können, wie bekannt, aus den 4 Fundamentalformeln in No. 8 abgeleitet werden.

10. Erklärung. Eine extensive Grösse mit einer Zahl multipliciren heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen mit dieser Zahl multipliciren, d. h.

$$\sum\overline{\alpha \mathrm{e}}\cdot\beta=\beta\cdot\sum\overline{\alpha \mathrm{e}}=\sum\overline{(\alpha\beta)\cdot \mathrm{e}}$$

11. Erklärung. Eine extensive Grösse durch eine Zahl, die nicht gleich null ist, dividiren, heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen durch diese Zahl dividiren, d. h.

$$\sum\overline{\alpha \mathrm{e}}:\beta=\sum\overline{\frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{e}}$$

12. Für die Multiplikation und Division extensiver Grössen (a, b) durch Zahlen (β, γ) gelten die Fundamentalformeln:

1) $\mathrm{a}\beta=\beta\mathrm{a}$,
2) $\mathrm{a}\beta\gamma=\mathrm{a}(\beta\gamma)$,
3) $(\mathrm{a}+\mathrm{b})\gamma=\mathrm{a}\gamma+\mathrm{b}\gamma$,
4) $\mathrm{a}\,(\beta+\gamma)=\mathrm{a}\beta+\mathrm{a}\gamma$,
5) $\mathrm{a}\cdot 1=\mathrm{a}$,
6) $\mathrm{a}\beta=0$ dann und nur dann, wenn entweder $\mathrm{a}=0$, oder $\beta=0$,
7) $\mathrm{a}:\beta=\mathrm{a}\,\frac{1}{\beta}$, wenn $\beta\gtrless 0$ ist *).

Beweis. Es sei $\mathrm{a}=\sum\overline{\alpha \mathrm{e}}$, $\mathrm{b}=\sum\overline{\beta \mathrm{e}}$, wo die Summe sich auf das System der Einheiten $\mathrm{e}_1\ldots\mathrm{e}_n$ bezieht, so ist

*) Das Zeichen $\gtrless$ zusammengesetzt aus $>$ und $<$ soll ungleich bedeuten.

1) $a\beta = \beta a$ nach der Definition [s. Formel in No. 10].

2) $a\beta\gamma = \sum \overline{\alpha e}\ \beta\gamma = \sum \overline{(\alpha\beta) e}\ \gamma$ [10].
$= \sum \overline{(\alpha\beta\gamma) e}$ [10].
$= \sum \overline{\alpha(\beta\gamma)\cdot e} = \sum \overline{\alpha e}\,(\beta\gamma)$ [10].
$= a(\beta\gamma)$

3) $(a+b)\gamma = \left(\sum\overline{\alpha e} + \sum\overline{\beta e}\right)\gamma = \sum \overline{(\alpha+\beta) e}\ \gamma$ [6].
$= \sum\overline{(\alpha+\beta)\gamma\cdot e}$ [10].
$= \sum\overline{(\alpha\gamma+\beta\gamma)\cdot e} = \sum\overline{(\alpha\gamma) e} + \sum\overline{(\beta\gamma) e}$ [6].
$= \sum\overline{\alpha e}\cdot\gamma + \sum\overline{\beta e}\cdot\gamma$ [10].
$= a\gamma + b\gamma$

4) $a(\beta+\gamma) = \sum\overline{\alpha e}(\beta+\gamma) = \sum\overline{\alpha(\beta+\gamma)\cdot e}$ [10].
$= \sum\overline{(\alpha\beta+\alpha\gamma) e} = \sum\overline{\alpha\beta\ e} + \sum\overline{\alpha\gamma\cdot e}$ [6].
$= \sum\overline{\alpha e}\cdot\beta + \sum\overline{\alpha e}\ \gamma$ [10].
$= a\beta + a\gamma$

5) $a\cdot 1 = \sum\overline{\alpha e}\cdot 1 = \sum\overline{\alpha e}$ [10].
$= a$

6) a) wenn $a = 0$ ist, so ist
$a\beta = 0\cdot\beta = 0$

b) wenn $\beta = 0$ ist, so ist
$a\beta = a\cdot 0 = \sum\overline{\alpha e}\cdot 0 = \sum\overline{0\cdot e}$ [10].
$= \sum\overline{0}$ [5. Anm.]
$= 0$

c) wenn $a\beta = 0$, so hat man
$0 = a\beta = \sum\overline{\alpha e}\ \beta = \sum\overline{\alpha\beta\cdot e}$ [10].

Hieraus folgt nun, dass alle Podukte $\alpha\beta$ d. h. $\alpha_1\beta$, $\alpha_2\beta$, $\cdots\alpha_n\beta$ null sein müssen. Denn gesetzt, es wäre eins derselben, z. B. $\alpha_1\beta$ nicht null, so hätte man aus der Gleichung

$$0 = \alpha_1\beta\ e_1 + \alpha_2\beta e_2 + \cdots\cdot\alpha_n\beta\ e_n$$

durch Mult. mit $\frac{1}{\alpha_1\beta}$ die Gleichung

$$0 = e_1 + \frac{\alpha_2\beta}{\alpha_1\beta}e_2 + \cdots \frac{\alpha_n\beta}{\alpha_1\beta}e_n \text{ oder}$$

$$e_1 = \left(-\frac{\alpha_2\beta}{\alpha_1\beta}\right)e_2 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_n\beta}{\alpha_1\beta}\right)e_n$$

d. h. e_1 wäre aus $e_2\cdots e_n$ numerisch ableitbar, oder zwischen den Einheiten $e_1\cdots e_n$ bestände eine Zahlbeziehung, was gegen die Annahme ist, da $e_1, e_2, \cdots e_n$ ein System von Einheiten bilden sollen. Somit ist

$$0 = \alpha_1\beta = \alpha_2\beta = \cdots \alpha_n\beta,$$

also entweder $\beta = 0$, oder wenn $\beta \gtrless 0$ ist,

$$0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_n$$

also $\mathrm{a} = \sum \overline{\alpha e} = \sum \overline{0e} = \sum \overline{0}$ [5. Anm.]

$$= 0$$

d. h. wenn $\mathrm{a}\beta = 0$ ist, so muss entweder β oder a gleich null sein.

7) $\mathrm{a} : \beta = \sum \overline{\alpha e} : \beta = \sum \overline{\frac{\alpha}{\beta} e}$ [11], da β nicht null ist.

$$= \sum \overline{\left(\alpha \frac{1}{\beta}\right) e} = \sum \overline{\alpha e} \frac{1}{\beta} \qquad [10].$$

$$= \mathrm{a} \frac{1}{\beta}$$

13. Für die Multiplikation und Division extensiver Grössen durch Zahlen gelten die algebraischen Gesetze der Multiplikation und Division.

Beweis. Denn aus den Fundamentalformeln (1 bis 6) des vorhergehenden Satzes folgen in bekannter Weise die sämmtlichen algebraischen Gesetze der Multiplikation, und durch Formel (7) desselben Satzes wird die Division, ebenso wie in der Algebra, auf die Multiplikation zurückgeführt. Also gelten auch die algebraischen Gesetze der Division für die Division extensiver Grössen durch Zahlen.

§. 2. Zusammenhang zwischen den aus einem System von Einheiten ableitbaren Grössen.

14. Erklärung. Die Gesammtheit der Grössen, welche aus einer Reihe von Grössen $a_1, a_2, \cdots a_n$ numerisch ableitbar sind, nenne ich das aus jenen Grössen ableitbare Gebiet (das Gebiet der Grössen $a_1, \cdots a_n$), und zwar nenne ich es ein Gebiet n-ter Stufe, wenn jene Grössen von erster Stufe (d. h. aus n ursprünglichen Einheiten numerisch ableitbar) sind, und sich das Gebiet nicht aus weniger als n solchen Grössen ableiten lässt. Ein Gebiet, welches ausser der Null keine Grösse enthält, heisst ein Gebiet nullter Stufe.

Anmerk. Das Gebiet erster Stufe ist also die Gesammtheit der Vielfachen einer Grösse erster Stufe, wenn man nämlich unter Vielfachem einer Grösse jedes Produkt der Grösse mit einer reellen Zahlgrösse versteht.

15. Erklärung. Zwei Gebiete heissen identisch, wenn jede Grösse des ersten Gebietes zugleich Grösse des zweiten ist und umgekehrt. Wenn jede Grösse eines Gebietes (A) zugleich Grösse eines andern (B) ist (ohne dass das Umgekehrte nothwendig stattfindet), so nenne ich beide Gebiete einander incident, und sage dann, das erste Gebiet (A) sei dem zweiten untergeordnet, das zweite dem ersten übergeordnet. Die Gesammtheit der Grössen, welche zweien oder mehreren Gebieten zugleich angehören, heisst ihr gemeinschaftliches Gebiet, und die Gesammtheit der Grössen, welche sich aus den Grössen zweier oder mehrerer Gebiete numerisch ableiten lassen, ihr verbindendes Gebiet.

Anmerk. Ist z. B. das Gebiet A aus den Einheiten e_1, e_2, e_3 abgeleitet und das Gebiet B aus den Einheiten e_2, e_3, e_4, so ist das den Gebieten A und B gemeinschaftliche Gebiet das aus den Einheiten e_2, e_3 abgeleitete, und das A und B verbindende Gebiet das aus den Einheiten e_1, e_2, e_3, e_4 abgeleitete.

16. Erklärung. Zwischen n Grössen $a_1, \cdots a_n$ herrscht dann und nur dann eine Zahlbeziehung, wenn sich eine Gleichung

$$\alpha_1 \ a_1 + \cdots \alpha_n a_n = 0$$

aufstellen lässt, in welcher die Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ nicht alle zugleich null sind.

Beweis. Denn wenn in der Gleichung

$$\alpha_1 \ a_1 + \cdots \alpha_n a_n = 0$$

auch nur Eine der Zahlen $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ von null verschieden ist, z. B. α_1, so ist die mit dieser Zahl verbundene Grösse a_1 aus den übrigen numerisch ableitbar; denn dann ist

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} a_3 - \cdots - \frac{\alpha_n}{a_1} a_n.$$

Umgekehrt, wenn irgend eine Zahlbeziehung zwischen den Grössen $a_1 \cdots a_n$ herrscht, z. B.

$$a_1 = \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 + \cdots \ \beta_n a_n$$

so wird

$$a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 + \cdots + \beta_n a_n = 0,$$

eine Gleichung, in welcher wenigstens der Koefficient von a_1 ungleich null ist.

17. Wenn n Grössen in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, und sie nicht alle null sind, so muss sich aus ihnen ein Verein von weniger als n Grössen aussondern lassen, welcher keiner Zahlbeziehung unterliegt, und aus dem die übrigen Grössen numerisch ableitbar sind.

Beweis. Es seien $a_1 \cdots a_n$ die in einer Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen, so muss [nach No. 2] sich eine derselben aus den übrigen numerisch ableiten lassen; dies sei a_n und sei etwa

$$a_n = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_{n-1} a_{n-1}.$$

Herrscht nun zwischen den Grössen $a_1 \cdots a_{n-1}$ abermals eine Zahlbeziehung, so wird wieder eine derselben etwa a_{n-1} aus den übrigen $a_1, \cdots a_{n-2}$ numerisch ableitbar sein müssen. Es sei

$$a_{n-1} = \beta_1 a_1 + \cdots \beta_{n-2} a_{n-2}.$$

Führt man diesen Ausdruck für a_{n-1} in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$a_n = (\alpha_1 + \alpha_{n-1}\beta_1) a_1 + \cdots (a_{n-2} + \alpha_{n-1} \beta_{n-2}) a_{n-2},$$

also ist dann auch a_n aus $a_1, \cdots a_{n-2}$ numerisch ableitbar.

Dies Verfahren wird man fortsetzen können, so lange als noch zwischen den jedesmal übrig bleibenden Grössen eine Zahlbeziehung stattfindet. Man wird also zuletzt entweder zu einer Schaar von mehreren Grössen kommen, die in keiner Zahlbeziehung mehr zu einander stehen, und aus denen die übrigen numerisch ableitbar sind, oder es bleibt zuletzt nur Eine Grösse, etwa a_1, übrig, aus der alle übrigen numerisch ableitbar sind Im letztern Falle darf diese Eine Grösse a_1 nicht null sein, weil sonst alle übrigen Grössen, als numerisch daraus ableitbar, auch null sein würden, was der Annahme widerstreitet. In beiden Fällen gelangt man also (No. 2) zu einem Vereine, der keiner Zahlbeziehung mehr unterliegt und aus dem alle übrigen der n Grössen $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableitbar sind.

18. Erklärung. Wenn in einem Verein von Grössen $a_1, a_2, \cdots a_n$ die erste a_1 nicht null ist, und keine der folgenden ſich aus den vorhergehenden numerisch ableiten lässt, ſo unterliegt der Verein keiner Zahlbeziehung.

Beweis. Denn geſetzt, er unterliege einer Zahlbeziehung, ſo müsste (nach 16) zwischen den Grössen $a_1, a_2, \cdots a_n$ eine Gleichung

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \alpha_n a_n = 0$$

aufgestellt werden können, in welcher nicht alle Koefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ zugleich null ſind. Es ſei α_r der letzte unter dieſen Koefficienten, welcher von null verschieden ist, ſo erhält man

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \alpha_r a_r = 0,$$

alſo, wenn r grösser als 1 ist,

$$a_r = -\frac{\alpha_1}{\alpha_r} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_r} a_2 \cdots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} a_{r-1},$$

d. h. a_r ist aus den vorhergehenden Grössen $a_1 \cdots a_{n-1}$ numerisch ableitbar, gegen die Vorausſetzung. Ist aber $r = 1$, ſo hat man

$$\alpha_1 a_1 = 0;$$

alſo, da dann α_1 ungleich null angenommen ist,

$$a_1 = 0,$$

was gleichfalls der Vorausſetzung widerstreitet. Alſo kann keine Zahlbeziehung zwischen den Grössen $a_1 \cdots a_n$ herrschen.

19. Wenn eine Grösse a_1 aus n Grössen $b_1, b_2 \cdots b_n$ numerisch ableitbar ist, und dabei die zu b_1 gehörige Ableitungszahl ungleich null ist, ſo ist das aus den n Grössen $b_1, b_2 \cdots b_n$ ableitbare Gebiet identisch mit dem aus den n Grössen $a_1, b_2, \cdots b_n$ ableitbaren.

Beweis. Es ſei $a_1 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots \beta_n b_n$, wo β_1 ungleich null ist, ſo ist

$$b_1 = \frac{1}{\beta_1} a_1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} b_2 \cdots - \frac{\beta_n}{\beta_1} b_n.$$

Ist nun c numerisch ableitbar aus $b_1, b_2, \cdots b_n$, etwa

$$c = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_n b_n,$$

ſo erhält man c als aus $a_1, b_2, \cdots b_n$ abgeleitet, indem man hier statt b_1 den gefundenen Werth ſetzt, nämlich

$$c = \frac{\gamma_1}{\beta_1} a_1 + \left(\gamma_2 - \frac{\gamma_1 \beta_2}{\beta_1}\right) b_2 + \cdots + \left(\gamma_n - \frac{\gamma_1 \beta_n}{\beta_1}\right) b_n.$$

1*

Umgekehrt ist c numerisch ableitbar aus $a_1, b_2, \cdots b_n$, etwa

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n,$$

ſo erhält man c als aus $b_1, b_2, \cdots b_n$ abgeleitet, indem man statt a_1 seinen Werth $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots \beta_n b_n$ ſetzt, nämlich

$$c = \alpha_1 \beta_1 b_1 + (\alpha_2 + \alpha_1 \beta_2) b_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_1 \beta_n) b_n.$$

Alſo, jede Grösse, die einem der beiden Gebiete angehört, gehört auch dem andern an, d. h. beide Gebiete ſind identisch.

20. Wenn m Grössen $a_1, \cdots a_m$, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, aus n Grössen $b_1, \cdots b_n$, numerisch ableitbar ſind, ſo kann man stets zu den m Grössen $a_1, \cdots a_m$ noch (n-m) Grössen $a_{m+1}, \cdots a_n$ von der Art hinzufügen, dass ſich die Grössen $b_1, \cdots b_n$ auch aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableiten lassen, und alſo das Gebiet der Grössen $a_1 \cdots a_n$ identisch ist dem Gebiete der Grössen $b_1 \cdots b_n$; auch kann man jene (n-m) Grössen aus den Grössen $b_1 \cdots b_n$ ſelbst entnehmen.

B e w e i s. Nach der Annahme ist a_1 aus $b_1 \cdots b_n$ ableitbar. Von den Zahlen, durch welche dieſe Ableitung erfolgt, muss mindestens Eine von null verschieden ſein, weil ſonst a_1 ſelbst null wäre, alſo der Verein der m Grössen (nach 2) einer Zahlbeziehung unterläge.

Es ſei die zu b_1 gehörige Zahl von null verschieden, und dies wird man immer annehmen können, da man ja die Indices beliebig wählen kann. Dann ist nach 19 das aus $b_1, b_2, \cdots b_n$ ableitbare Gebiet identisch dem aus $a_1, b_2, \cdots b_n$ ableitbaren. Man habe nun für irgend ein r, welches $< m$ ist, gefunden, dass das Gebiet der Grössen $b_1, b_2, \cdots b_n$ identisch ſei dem Gebiete der Grössen $a_1, a_2, \cdots a_r, b_{r+1}, \cdots b_n$, ſo wird nun, da nach der Hypotheſis a_{r+1} aus $b_1, b_2, \cdots b_n$ ableitbar ist, es auch (vermöge der Gebiets-Identität) aus $a_1, a_2, \cdots a_r, b_{r+1} \cdots b_n$ ableitbar ſein. In dem Ausdrucke dieſer Ableitung $a_{r+1} = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_r a_r + \beta_{r+1} b_{r+1} + \cdots \beta_n b_n$ muss nothwendig einer der Koefficienten, die zu $b_{r+1}, \cdots b_n$ gehören, von null verschieden ſein, weil ſonst zwischen den Grössen $a_1 \cdots a_{r+1}$ eine Zahlbeziehung stattfände, gegen die Hypotheſis; es ſei dies etwa β_{r+1}, ſo ist, nach 19, das aus $a_1, \cdots a_r, b_{r+1} \cdots b_n$ ableit-