

Cambridge University Press  
978-1-108-06471-2 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 3:  
Calcul Intégral; Équations Différentielles  
Camille Jordan  
Frontmatter  
[More information](#)

---

## CAMBRIDGE LIBRARY COLLECTION

*Books of enduring scholarly value*

### Mathematics

From its pre-historic roots in simple counting to the algorithms powering modern desktop computers, from the genius of Archimedes to the genius of Einstein, advances in mathematical understanding and numerical techniques have been directly responsible for creating the modern world as we know it. This series will provide a library of the most influential publications and writers on mathematics in its broadest sense. As such, it will show not only the deep roots from which modern science and technology have grown, but also the astonishing breadth of application of mathematical techniques in the humanities and social sciences, and in everyday life.

### Cours d'analyse de l'école polytechnique

One of the great algebraists of the nineteenth century, Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922) became known for his work on matrices, Galois theory and group theory. However, his most profound effect on how we see mathematics came through his *Cours d'analyse*, which appeared in three editions. Reissued here is the first edition, which was published in three volumes between 1882 and 1887. While highly influential in its time, it now appears to us a transitional work between the partially rigorous 'epsilon delta' calculus of Cauchy and his successors, and the new 'real number' analysis of Weierstrass and Cantor. The first two volumes follow the old tradition while the third volume incorporates a substantial amount of the new analysis. Ten years later, the even more influential second edition followed the new point of view from its start. Volume 3 (1887) covers the integration of differential equations and the calculus of variations.

Cambridge University Press

978-1-108-06471-2 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 3:

Calcul Intégral; Équations Différentielles

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

---

Cambridge University Press has long been a pioneer in the reissuing of out-of-print titles from its own backlist, producing digital reprints of books that are still sought after by scholars and students but could not be reprinted economically using traditional technology. The Cambridge Library Collection extends this activity to a wider range of books which are still of importance to researchers and professionals, either for the source material they contain, or as landmarks in the history of their academic discipline.

Drawing from the world-renowned collections in the Cambridge University Library and other partner libraries, and guided by the advice of experts in each subject area, Cambridge University Press is using state-of-the-art scanning machines in its own Printing House to capture the content of each book selected for inclusion. The files are processed to give a consistently clear, crisp image, and the books finished to the high quality standard for which the Press is recognised around the world. The latest print-on-demand technology ensures that the books will remain available indefinitely, and that orders for single or multiple copies can quickly be supplied.

The Cambridge Library Collection brings back to life books of enduring scholarly value (including out-of-copyright works originally issued by other publishers) across a wide range of disciplines in the humanities and social sciences and in science and technology.

Cambridge University Press

978-1-108-06471-2 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 3:

Calcul Intégral; Équations Différentielles

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

# Cours d'analyse de l'école polytechnique

VOLUME 3: CALCUL INTÉGRAL;  
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

CAMILLE JORDAN



CAMBRIDGE  
UNIVERSITY PRESS

Cambridge University Press  
978-1-108-06471-2 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 3:  
Calcul Intégral; Équations Différentielles  
Camille Jordan  
Frontmatter  
[More information](#)

---

**CAMBRIDGE**  
UNIVERSITY PRESS

University Printing House, Cambridge, CB2 8BS, United Kingdom

Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York

Cambridge University Press is part of the University of Cambridge.  
It furthers the University's mission by disseminating knowledge in the pursuit of  
education, learning and research at the highest international levels of excellence.

[www.cambridge.org](http://www.cambridge.org)

Information on this title: [www.cambridge.org/9781108064712](http://www.cambridge.org/9781108064712)

© in this compilation Cambridge University Press 2014

This edition first published 1887

This digitally printed version 2014

ISBN 978-1-108-06471-2 Paperback

This book reproduces the text of the original edition. The content and language reflect  
the beliefs, practices and terminology of their time, and have not been updated.

Cambridge University Press wishes to make clear that the book, unless originally published  
by Cambridge, is not being republished by, in association or collaboration with, or  
with the endorsement or approval of, the original publisher or its successors in title.

Cambridge University Press

978-1-108-06471-2 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 3:

Calcul Intégral; Équations Différentielles

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

---

COURS  
D'ANALYSE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Cambridge University Press

978-1-108-06471-2 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 3:

Calcul Intégral; Équations Différentielles

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

---



Cambridge University Press

978-1-108-06471-2 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 3:

Calcul Intégral; Équations Différentielles

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

# COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. C. JORDAN,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

—  
TOME TROISIÈME.

CALCUL INTÉGRAL.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

—  
PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

—  
1887

(Tous droits réservés.)

Cambridge University Press

978-1-108-06471-2 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 3:

Calcul Intégral; Équations Différentielles

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

---



Cambridge University Press

978-1-108-06471-2 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 3:

Calcul Intégral; Équations Différentielles

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

---

## PRÉFACE.

---

Le présent Volume, qui terminera notre *Cours d'Analyse*, a pour objet l'étude des équations différentielles et le Calcul des variations.

Nous nous sommes trouvé conduit, en l'écrivant, à étendre sensiblement notre programme primitif.

La théorie des équations différentielles a été, en effet, depuis quelques années et dans des directions très diverses, l'objet de travaux considérables, qui l'ont complètement transformée. Le moment semble venu de résumer quelques-unes de ces théories nouvelles en vue de les introduire dans l'enseignement.

On trouvera donc dans ce Volume de nombreux emprunts aux travaux de MM. Briot et Bouquet, Poincaré, Darboux et Königsberger sur les équations différentielles ordinaires; de MM. Fuchs, Halphen et Picard sur les équations linéaires; de Jacobi et de MM. Lie et Mayer sur les équations aux dérivées partielles et aux différentielles totales; de Hankel sur les fonctions de Bessel; de MM. Clebsch et Mayer sur la seconde variation des intégrales.

Bien que nous ayons encore laissé de côté plusieurs théories importantes, ces diverses additions ont notablement

Cambridge University Press  
978-1-108-06471-2 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 3:  
Calcul Intégral; Équations Différentielles  
Camille Jordan  
Frontmatter  
[More information](#)

---

VI

PRÉFACE.

accru les dimensions du présent Volume. Nous avons donc dû renoncer à notre projet primitif d'y joindre un Recueil d'exercices et des Notes complémentaires.

Celles de ces Notes qui se rapportaient aux sujets traités dans ce Volume ont été fondues dans le corps de l'Ouvrage; mais les autres ont été sacrifiées, à l'exception de l'une d'elles, ayant pour objet les principes du Calcul infinitésimal, et qu'il nous a paru indispensable de conserver.

Nous devons tous nos remerciements à M. Humbert pour la part active qu'il a bien voulu prendre à la revision des démonstrations de ce Livre et à la correction des épreuves.





VIII	TABLE DES MATIÈRES.	Pages
Numéros		
55.	Des équations $y'' = f(y)$ , $y'' = f(y')$ .....	60
56.	Courbes dont le rayon de courbure est proportionnel à la normale.....	61
57-58.	Mouvement des planètes. — Lois de Kepler.....	63
<i>IV. — Équations linéaires aux différentielles totales.</i>		
59-61.	Équations simultanées aux dérivées partielles qui définissent les combinaisons intégrables. — Multiplicateur.....	67
62-64.	Systèmes complets. — Systèmes jacobiens.....	70
65-69.	Intégration des systèmes jacobiens par la méthode de M. Mayer.....	74
70-76.	Transformations infinitésimales. — Théorèmes de M. Lie... ..	79
<i>V. — Étude directe des intégrales.</i>		
77-81.	Existence des intégrales.....	87
82-84.	Calcul des intégrales par des séries.....	96
85-87.	Méthode des quadratures.....	99
88.	Variation des constantes.....	103
89-92.	Points critiques des intégrales. — Cas des équations linéaires.....	105
93.	Étude des intégrales aux environs d'un point critique, pour l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x, y)}$ .....	109
94-97.	Étude des intégrales aux environs d'un point critique, pour l'équation $x \frac{dy}{dx} = f(x, y)$ .....	111
98-99.	Étude des intégrales aux environs d'un point critique, pour l'équation $f\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = 0$ .....	121
100-103.	Intégration de cette équation lorsque ses intégrales sont monodromes.....	124
104.	Application à l'équation binôme.....	130
105.	Intégrales singulières.....	134

## CHAPITRE II.

### ÉQUATIONS LINÉAIRES.

#### I. — Généralités.

106-114.	Propriétés des systèmes d'équations linéaires du premier ordre.....	135
115.	Système adjoint.....	142
116-117.	Systèmes à seconds membres.....	144
118-124.	Équations linéaires d'ordre supérieur.....	146
125.	Équations à second membre.....	152
126-127.	Équation adjointe.....	153

Cambridge University Press

978-1-108-06471-2 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 3:

Calcul Intégral; Équations Différentielles

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

## TABLE DES MATIÈRES.

IX

II. — *Équations linéaires à coefficients constants.*

Numéros	Pages
128-130. Équations sans second membre.....	155
131-133. Équations à second membre de la forme $Pe^{\lambda t}$ .....	158
134. Exemples.....	160
135-137. Systèmes d'équations sans seconds membres.....	163
138. Systèmes d'équations à seconds membres de la forme $Pe^{\lambda t}$ ..	167
139. De l'équation $(\alpha t + \beta)^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1(\alpha t + \beta)^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots = 0$ .	168

III. — *Intégration par des séries.*

140-145. Étude des intégrales aux environs d'un point critique.....	169
146-152. Condition pour que les intégrales soient régulières.....	177
153. Cas où les intégrales sont irrégulières.....	187
154-155. Intégration des équations qui n'ont qu'un nombre fini de points critiques.....	190
156. Groupe d'une équation linéaire.....	193
157-162. Recherche des conditions d'irréductibilité.....	193
163-167. Équations dont les intégrales sont partout régulières. — i. Équations dont les intégrales sont algébriques.....	202
168-169. Équations dont l'intégrale est rationnelle.....	209
170-175. Équations de M. Halphen.....	211
176. Équations à coefficients algébriques..	219
177-184. Équation de Gauss.....	220
185-187. Polynômes de Jacobi.....	231
188-191. Équation de Bessel. — Ses diverses transformées.....	235

IV. — *Intégration par des intégrales définies.*

192-201. Équation de Gauss généralisée. — Son groupe.....	241
202-203. Équation aux périodes des fonctions elliptiques.....	251
204. Équation de Laplace.....	253
205-211. Application à l'équation $x \frac{d^2 I}{dx^2} + (2n+1) \frac{dI}{dx} + xI = 0$ ....	255
212-217. Valeur asymptotique de $J_n(x)$ .....	266

V. — *Équations de M. Picard.*

218-221. Propriétés de leurs intégrales.....	274
222-225. Forme générale des intégrales.....	279
226-229. Détermination des constantes.....	285
230-231. Application à l'équation de Lamé.....	291

## CHAPITRE III.

## ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Numéros	I. — <i>Notions préliminaires.</i>	Pages
232.	Réduction à des systèmes ne contenant que des dérivées partielles du premier ordre.....	297
233-234.	Élimination.....	298
235-240.	Systèmes normaux. — Existence des intégrales.....	300
II. — <i>Équations aux dérivées partielles du premier ordre.</i>		
241-242.	Équations linéaires. — Applications.....	311
243.	Équations non linéaires. — Intégrale complète; intégrale générale; intégrales singulières.....	315
244-254.	Méthode des caractéristiques.....	318
255-259.	Première méthode de Jacobi.....	327
260-264.	Nouvelle méthode de Jacobi et Mayer.....	333
265-268.	Équations intégrables par différentiation.....	339
269-270.	Transformations de contact.....	347
III. — <i>Équations aux dérivées partielles du second ordre.</i>		
271.	De l'équation $\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n} = 0$ .....	348
272.	De l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .....	350
273.	Simplification de l'équation $A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + M = 0$ .....	351
274-276.	Équation de Laplace.....	352
277.	Équation de Liouville.....	355
278-281.	Équation des surfaces minima.....	357
282-287.	Méthode de Monge. — Application à $rt - s^2 = 0$ .....	364
IV. — <i>Équations linéaires à coefficients constants.</i>		
288-292.	Principes de la méthode.....	370
293.	Propagation de la chaleur dans un milieu indéfini.....	377
294-296.	Propagation du son.....	378
297.	Problème de Cauchy.....	384
298-301.	Propagation de la chaleur dans une barre indéfinie dans un sens.....	387
302-303.	Cordes vibrantes.....	392
304-315.	Refroidissement d'une barre hétérogène.....	394
316-320.	Équilibre de température d'une sphère.....	411
321-333.	Équilibre de température de l'ellipsoïde.....	419
334-350.	Refroidissement d'une sphère.....	440

Cambridge University Press

978-1-108-06471-2 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 3:

Calcul Intégral; Équations Différentielles

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

## TABLE DES MATIÈRES.

XI

## CHAPITRE IV.

## CALCUL DES VARIATIONS.

I. — *Première variation des intégrales simples.*

Numéros		Pages
351-355.	Variations successives d'une fonction ou d'une intégrale définie.....	464
356-357.	Maxima et minima des intégrales définies.....	470
358-364.	Transformation de la première variation. — Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle s'annule.....	471
365-366.	Condition d'intégrabilité de $\varphi(x, y, \dots, y^m, z, \dots, z^n)$ .....	483
367.	Transformation des équations de la Dynamique.....	485
368.	Brachistochrone.....	487
369.	Ligne de longueur minimum.....	491
370-372.	Lignes géodésiques.....	493
373-374.	Application à l'ellipsoïde.....	497
375.	Problème des isopérimètres.....	502

II. — *Variation seconde.*

376-379.	Réduction à la forme canonique des équations de condition fournies par la variation première.....	504
380-385.	Transformation de la variation seconde. — Première condition pour l'existence effective d'un maximum ou d'un minimum.....	507
386-391.	Propriété des systèmes canoniques.....	514
392-397.	Nouvelle transformation de $\delta^2 I$ . — Caractères des maxima et des minima.....	522

III. — *Variation des intégrales multiples.*

398-401.	Principes généraux.....	532
402.	Problème de Gauss.....	541
403.	Surface minima.....	544
404.	Transformation des équations du potentiel.....	545

## NOTE SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS.

1-6.	Nombres irrationnels. — Limites.....	549
7-12.	Fonctions. — Fonctions limitées. — Théorème de M. Darboux.....	556
13-19.	Fonctions intégrables.....	561

Cambridge University Press

978-1-108-06471-2 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 3:

Calcul Intégral; Équations Différentielles

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

## XII

## TABLE DES MATIÈRES.

Numéros	Pages
20-23. Fonctions à variation limitée.....	567
24-30. Propriétés des fonctions continues.....	571
31-32. Fonctions continues sans dérivée.....	577
33-36. Théorème de Rolle. — Conséquences.....	581
37-38. Dérivées des fonctions implicites.....	583
39-45. Courbes continues.....	587
46-54. Courbes rectifiables. — Courbes quarrables.....	594
55-61. Remarques diverses sur les fonctions d'une variable imaginaire.....	600
62. Fonctions à domaine limité par une ligne critique.....	609
63-65. Discontinuité de certaines intégrales définies.....	610
66-67. Une même expression peut représenter des fonctions différentes dans diverses parties du plan.....	613

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.



## ERRATA.

Pages	Lignes	au lieu de	lisez
27	10	$m$	$n$
27	11	$n$	$m$
52	29	$(\psi, \varphi_1)$	$((\psi, \varphi_1), \varphi_2)$
66	13	0	$t_0$
71	20	$x_1, \dots, x_n$	$\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_m$
122	16	$\frac{p-a}{p}$	$\frac{p+\alpha}{p}$
124	18	négatif	nul ou négatif
125	15	négatif	nul ou négatif
146	16	$-T$	$=T$
152	11	$p_2$	$p_1 x$
166	2 et 3	$\gamma + \gamma_1 s$	$\frac{\gamma}{s^2}$
199	4	$Y'' = \text{etc.}$	$Y'' = SY' - bY'$
215	23	négative	positive
239	8	+	-
322	13	Soient	Soit
347	12	$dz - \sum p_i dx_i$	$\rho(dz - \sum p_i dx_i)$
401	2	$K^{\frac{1}{2}}$	$K^{-\frac{1}{2}}$
414	22	(58)	(57)
414	23	(57)	(58)
416	15	$(2n+1)!$	$2n+1$
422	2	$\frac{c}{b}$	$\frac{b}{c}$
435	7	$d\alpha$	$d\beta$
435	19	$N'N'' d\alpha$	$N'N'' d\beta$
436	2	$v^2 d\alpha$	$v^2 d\beta$
454	13	$\frac{\rho'}{\rho - \rho}$	$\frac{\rho'}{\rho' - \rho}$
457	19	$\gamma + \delta$	$\gamma + \beta$
468	5	$[\delta\varphi]_0$	$2[\delta\varphi]_0$
480	4	{ de l'équation $\psi = 0$ laquelle a	des équations $\psi = 0,$ $\chi = 0, \dots$ , lesquelles ont
491	3	$\frac{\partial\psi}{\partial y_1}$	$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1$
491	4	$\frac{\partial\chi}{\partial y_1}$	$\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)_1$
526	1	(35)	(39)
535	26	$\frac{\partial u}{\partial v}$	$\frac{\partial v}{\partial x}$
536	3	$\delta v_1$	$\delta v_1$

XIV		ERRATA.	
Pages	Lignes	au lieu de	<i>lisez</i>
543	13	$ds$	$\sqrt{dx^2 + dy^2}$
573	14	$c$	$x$
589	20	$at_k$	$at_{k+1}$

SUPPLÉMENT AUX ERRATA PRÉCÉDENTS.

TOME I.

Pages	Lignes	au lieu de	<i>lisez</i>
40	15	$v$	$t$
78	3	positif ou négatif	négatif ou positif
111	20	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
127	8	2	$2i$
163	12	vers $n = \infty$ pour	pour $x = \infty$ vers
177	13	$q_n$	$Q_n$
205	27	R	$R_1$
230	5	$\frac{dc}{1.2}$	$\frac{dc}{1.2}$
244	18	le	la
245	24	$ds \sqrt{\quad}$	$ds = \sqrt{\quad}$
250	21	$a^2$	$a^2$
261	21	d'un périmètre	du périmètre
269	15	$B^2$	$B^2$
271	20	$(B + \Delta B)$	$(B + \Delta B)^2$
283	3	$\sqrt{m^2 n^2 + m^2}$	$\sqrt{m^2 n^2 + m^2}$
283	3	$\frac{m \sqrt{1 + n^2}}{(m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{m}{m^2 + n^2}$
283	4	l'errata du Tome I <sup>er</sup> indique à tort une correction	
284	22	$b$	$b_1$
284	23	$b$	$b_2$
308	30	$t, t + dt$	$v, v + dv$
355	17	linéaires	trilinéaires

TOME II.

XIV	12	$a_{n-}$	$a_{n-2}$
25	4	$y$	$x$
25	9	$x$	$y$
45	15	$dx$	$d^2$
83	19	$o$	$c$
236	2, 3, 4, 5	$\pi$	$n\pi$
381	2	$z$	$u$