COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME PARTIE.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

I. — Notions préliminaires.

1. Nous avons vu dans le *Calcul différentiel* (Chap. II) que, lorsqu'on a un certain nombre de relations entre une ou plusieurs variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots$ et des fonctions $y_1, y_2, \ldots$ de ces variables, on pouvait, en combinant ces équations avec celles qui s'en déduisent par dérivation, en déduire une infinité d'équations différentielles auxquelles satisfont ces fonctions.

Il nous reste à traiter le problème inverse, en cherchant à remonter des équations différentielles aux relations qui existent entre les variables elles-mêmes.

Nous nous occuperons d'abord des équations différentielles *ordinaires*, où ne figure qu'une variable indépendante x.

2. Soit proposé un système de m équations différentielles entre x et m fonctions $y_1, \ldots, y_m$ de cette variable. On pourra, par l'introduction de variables auxiliaires, ramener le système proposé à un autre système équivalent, où ne figurent que des dérivées du premier ordre.

En effet, supposons, pour fixer les idées, que nous ayons deux équations différentielles simultanées

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0,$$
$$F_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0.$$

Posons

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \quad \frac{dz}{dx} = z'.$$

On aura évidemment

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \quad \frac{dz}{dx} = z',$$
$$F\left(x, y, y', y'', \frac{dy''}{dx}, z, z', \frac{dz'}{dx}\right) = 0,$$
$$F_1\left(x, y, y', y'', \frac{dy''}{dx}, z, z', \frac{dz'}{dx}\right) = 0.$$

Ces cinq équations différentielles forment un système manifestement équivalent aux deux équations primitives, mais où ne figurent plus que des dérivées du premier ordre.

3. Considérons donc un système simultané de m équations du premier ordre

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, z, \frac{dz}{dx}, u, \frac{du}{dx}, \ldots\right) = 0,$$
$$F_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, z, \frac{dz}{dx}, u, \frac{du}{dx}, \ldots\right) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

entre la variable indépendante x et m fonctions inconnues y, z, u, ...

Si parmi ces équations il en figure une, $F = 0$, qui ne contienne pas de dérivée, soit y une des variables qu'elle contient, l'équation résolue par rapport à y donnera un résultat de la forme

$$y = \varphi(x, z, u, \ldots). \tag{1}$$

On en déduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dx} + \ldots.$$

Substituant ces valeurs dans les équations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots,$$

on aura un système de $m - 1$ équations différentielles pour déterminer les $m - 1$ variables z, u, ...; on calculera ensuite y par l'équation (1).

Supposons, au contraire, que l'équation $F = 0$ contienne au moins une dérivée, telle que $\frac{dy}{dx}$. Résolvant par rapport à cette dérivée, il viendra

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y, z, u, \ldots, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}, \ldots\right).$$

Substituons cette valeur dans les équations suivantes; on obtiendra un système

$$\frac{dy}{dx} = f,$$

$$\varphi_1\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, u, \frac{du}{dx}, \ldots\right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

équivalent au proposé.

Si l'une des équations $\varphi_1 = 0$, ... ne contenait aucune dérivée, on pourrait s'en servir, comme il a été expliqué, pour éliminer une variable et ramener l'étude du système proposé à celle d'un système de $m-1$ équations différentielles seulement.

Si, au contraire, l'équation $\varphi_1 = 0$ contient une dérivée $\frac{dz}{dx}$, on en déduira

$$\frac{dz}{dx} = f_1\left(x, y, z, u, \ldots, \frac{du}{dx}, \ldots\right),$$

et l'on substituera cette valeur dans les équations suivantes.

Continuant ainsi, on arrivera à mettre le système sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f, \quad \frac{dz}{dx} = f_1, \quad \frac{du}{dx} = f_2, \quad \ldots,$$

f ne contenant plus $\frac{dy}{dx}$, f_1 ne contenant ni $\frac{dy}{dx}$ ni $\frac{dz}{dx}$, ...

Portant maintenant dans chaque équation les valeurs des dérivées fournies par les équations suivantes, on obtiendra un nouveau système d'équations, de la forme suivante :

$$\frac{dy}{dx} = \psi\ (x, y, z, u, \ldots),$$
$$\frac{dz}{dx} = \psi_1(x, y, z, u, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Un système d'équations simultanées du premier ordre, ainsi résolu par rapport aux dérivées, est dit ramené à sa *forme normale*.

On voit, par ce qui précède, que l'étude d'un système quelconque d'équations différentielles simultanées peut être ramenée à celle d'un système normal. Le nombre des équations de ce système normal équivalent au proposé servira de définition à l'*ordre* de ce dernier.

En particulier, si l'on n'a qu'une équation différentielle

$$\frac{d^m y}{dx^m} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right),$$

elle sera équivalente au système normal

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \ldots, \quad \frac{dy^{m-2}}{dx^{m-2}} = y^{m-1},$$
$$\frac{dy^{m-1}}{dx} = f(x, y, y', \ldots, y^{m-1}).$$

Son ordre sera donc égal à m.

4. D'un système de m équations différentielles entre x et les m fonctions y, z, u, ..., on peut déduire, ainsi que nous allons le voir, une équation différentielle où ne figurent que x et y.

En général, le nombre des équations données n'est pas suffisant pour éliminer z, u, ... et leurs dérivées. Mais, si nous prenons la dérivée de chacune des équations données, nous obtiendrons m équations nouvelles, en introduisant $m-1$ inconnues de plus, à savoir une dérivée nouvelle de chacune des fonctions z, u, ... En répétant cette opération, on arrivera évidemment à se procurer assez d'équations pour effectuer l'élimination.

Considérons, par exemple, un système de trois équations

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0$$

entre x, y, z, u. Supposons que l'ordre de la plus haute dérivée de chaque variable, dans chacune de ces équations, soit donné par le Tableau suivant :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{c|ccc} & y & z & u \\ \hline F & m & n & p \\ F_1 & m_1 & n_1 & p_1 \\ F_2 & m_2 & n_2 & p_2 \end{array} \right.$$

Différentions les trois équations respectivement A, A_1, A_2 fois. Nous obtiendrons ainsi un total de $A + A_1 + A_2 + 3$ équations, entre lesquelles on aura à éliminer z et ses B premières dérivées, u et ses C premières dérivées, B désignant le plus grand des nombres $A+n$, A_1+n_1, A_2+n_2, et C le plus grand des nombres $A+p$, A_1+p_1, A_2+p_2 ; soit en tout $B+C+2$ inconnues.

En thèse générale, l'élimination ne pourra se faire que si le nombre des équations surpasse celui des inconnues. On devra donc avoir

$$A+A_1+A_2 \geqq B+C$$

et, comme on a

$$B \geqq A_1+n_1, \quad C \geqq A_2+p_2,$$
$$B \geqq A_2+n_2, \quad C \geqq A_1+p_1,$$

on en déduit

$$A \geqq n_1+p_2, \quad A \geqq n_2+p_1.$$

On voit de même que A_1 est au moins égal au plus grand des deux nombres $n+p_2$, n_2+p, et A_2 au moins égal au plus grand des nombres $n+p_1$, n_1+p.

Il est d'ailleurs aisé de voir qu'en prenant A, A_1, A_2 précisément égaux aux limites inférieures trouvées ci-dessus, on aura juste le nombre d'équations nécessaires pour l'élimination.

Soit en effet, pour fixer les idées,

$$A = n_1+p_2 \geqq n_2+p_1,$$
$$B = A+n \geqq A_1+n_1 \geqq A_2+n_2.$$

On en déduira

$$A+n = n+n_1+p_2 \leqq A_1+n_1,$$

d'où

$$B = A+n = A_1+n_1;$$

et, d'autre part,

$$A+p = p+n_1+p_2 \leqq A_2+p_2.$$

On trouvera de même

$$A_1+p_1 \leqq A_2+p_2 \quad \text{ou} \quad \leqq A+p,$$

suivant que A_1 sera égal à $n+p_2$ ou à n_2+p.

On aura donc, dans tous les cas,

$$C = A_2 + p_2 \overline{\overline{>}} A_1 + p_1 \overline{\overline{>}} A + p,$$

et, par suite,

$$B + C = A_1 + n_1 + A_2 + p_2 = A + A_1 + A_2.$$

En donnant à A, A_1, A_2 les valeurs ci-dessus, on aura donc une équation de plus qu'il n'est nécessaire pour déterminer z, u et leurs dérivées au moyen de y et de ses dérivées. Ces valeurs, substituées dans la dernière équation, donneront une équation finale ne contenant que y, et ses dérivées jusqu'à l'ordre D, D désignant le plus grand des nombres $A + m$, $A_1 + m_1$, $A_2 + m_2$.

Ce nombre D, qui représente l'ordre du système, sera évidemment égal au plus grand des nombres $m + n_1 + p_2$, $m_1 + n + p_2$, ..., qu'on obtient en associant ensemble trois nombres du Tableau (2) appartenant à la fois à des horizontales et à des verticales différentes.

5. Ce résultat, qu'on étendrait sans difficulté au cas d'un nombre quelconque d'équations, peut se trouver en défaut si z, u et leurs dérivées figurent dans les équations proposées de telle sorte que l'élimination puisse se faire avant qu'on ait formé toutes les équations auxiliaires qui paraissent au premier abord nécessaires, d'après le nombre des quantités à éliminer.

On obtiendra, même dans ce cas, une équation finale en y de la forme

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{\alpha-1} y}{dx^{\alpha-1}}\right);$$

mais z, u, au lieu d'être immédiatement donnés en fonction de y et de ses dérivées, pourront être déterminés par de nouvelles équations différentielles, de la forme

$$\frac{d^\lambda z}{dx^\lambda} = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, z, u, \dots, \frac{d^{\lambda-1} z}{dx^{\lambda-1}}, \frac{d^{\mu-1} u}{dx^{\mu-1}}\right),$$

$$\frac{d^\mu u}{dx^\mu} = \varphi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, z, u, \dots, \frac{d^{\lambda-1} z}{dx^{\lambda-1}}, \frac{d^{\mu-1} u}{dx^{\mu-1}}\right).$$

Éliminant u entre ces équations par la répétition du même procédé, on arrivera à faire dépendre l'étude du système primitif de celle d'un système de la forme suivante :

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = f\left(x, y, \ldots, \frac{d^{\alpha-1} y}{dx^{\alpha-1}}\right),$$
$$\frac{d^\beta z}{dx^\beta} = f_1\left(x, y, \ldots, z, \ldots, \frac{d^{\beta-1} z}{dx^{\beta-1}}\right),$$
$$\frac{d^\gamma u}{dx^\gamma} = f_2\left(x, y, \ldots, z, \ldots, u, \ldots, \frac{d^{\gamma-1} u}{dx^{\gamma-1}}\right).$$

6. Considérons, en particulier, les fonctions déterminées par une équation différentielle

$$\mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}\right) = 0,$$

algébrique par rapport à $x, y, \ldots, \dfrac{d^\alpha y}{dx^\alpha}$.

Toute solution d'une semblable équation satisfait évidemment à une infinité d'équations analogues résultant de la combinaison de F et de ses dérivées.

Réciproquement, soit y une fonction de x qui satisfasse à une série d'équations différentielles algébriques

$$\mathrm{F} = 0, \quad \mathrm{F}_1 = 0, \quad \ldots.$$

Toutes ces équations résulteront de la combinaison de l'une d'entre elles avec ses dérivées.

Considérons, en effet, parmi toutes les équations de ce genre auxquelles y satisfait, celles dont l'ordre est minimum, et parmi celles-ci choisissons celle où la plus haute dérivée est élevée à la puissance minimum. Soient α et μ cet ordre et ce degré, $\mathrm{F} = 0$ l'équation correspondante ; $\mathrm{F}_1 = 0$ une autre équation quelconque du système.

De l'équation $\mathrm{F} = 0$ et de ses dérivées on pourra déduire les valeurs de $\dfrac{d^{\alpha+1} y}{dx^{\alpha+1}}, \cdots$ et des puissances de $\dfrac{d^\alpha y}{dx^\alpha}$ de degré $\overline{\gtrless} \mu$ en fonction rationnelle de $x, y, \dfrac{dy}{dx}, \ldots, \dfrac{d^\alpha y}{dx^\alpha}, \ldots, \left(\dfrac{d^\alpha y}{dx^\alpha}\right)^{\mu-1}$.

Substituant ces valeurs dans F_1, on obtiendra une nouvelle équation $\Phi = 0$, qui ne contiendra plus que x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\ldots$, $\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}$, $\ldots$, $\left(\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}\right)^{\mu-1}$. Mais, d'après notre hypothèse, y ne satisfait à aucune équation de ce genre. Donc l'équation $\Phi = 0$ est une identité.

Nous dirons que la fonction y est une solution *propre* de l'équation $F = 0$ et une solution *impropre* des autres équations $F_1 = 0$, $\ldots$; et nous appellerons *ordre* de la fonction l'ordre de l'équation $F = 0$.

D'après cette définition, les fonctions algébriques seront d'ordre zéro; les fonctions d'ordre > 0 seront transcendantes.

Une équation différentielle algébrique $F = 0$ est dite *irréductible,* si elle n'admet que des solutions propres.

7. Soient y, z, $\ldots$ des solutions des équations différentielles algébriques

$$(3) \qquad \begin{cases} F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}\right) = 0, \\ F_1\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^\beta z}{dx^\beta}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

de degrés μ, ν, $\ldots$, par rapport à $\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}$, $\frac{d^\beta z}{dx^\beta}$, $\ldots$.

Soient, d'autre part, Y, Z, $\ldots$ d'autres fonctions satisfaisant à des équations analogues

$$(4) \qquad \Phi = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \ldots.$$

Supposons qu'il existe entre ces diverses fonctions et leurs dérivées une relation algébrique

$$\Psi = 0.$$

Si nous éliminons Y, Z, $\ldots$ entre cette équation et les équations (4), nous obtiendrons une équation différentielle

$G = 0$ entre $y, z, \ldots$, qui représentera la condition nécessaire et suffisante pour que ces fonctions, associées à des solutions convenablement choisies des équations (4), satisfassent à l'équation $\Psi = 0$.

Si donc l'équation $G = 0$ n'est qu'une conséquence des équations (3) et de leurs dérivées, tout système de solutions de (3), associé à un système convenable de solutions de (4), satisfera encore à l'équation $\Psi = 0$.

Ce cas se présentera nécessairement s'il n'existe entre les solutions $y, z, \ldots$, primitivement données, aucune relation algébrique de la forme

$$(5) \qquad H\left(x, y, \ldots, \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}, z, \ldots, \frac{d^\beta z}{dx^\beta}, \ldots\right) = 0,$$

où $\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}, \frac{d^\beta z}{dx^\beta}, \cdots$ figurent avec des degrés respectivement inférieurs à $\mu, \nu, \ldots$.

En effet, au moyen des équations (3) et de leurs dérivées, on peut éliminer de G les dérivées $\frac{d^{\alpha+1} y}{dx^{\alpha+1}}, \ldots, \frac{d^{\beta+1} z}{dx^{\beta+1}}, \ldots$ et les puissances $\left(\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}\right)^\mu, \left(\frac{d^\beta z}{dx^\beta}\right)^\nu, \ldots$. On obtiendra ainsi une équation de la forme (5), laquelle devra, par hypothèse, se réduire à une identité.

8. Comme application des considérations qui précèdent, cherchons la forme la plus générale des relations algébriques qui peuvent exister entre des intégrales abéliennes $y_1, \ldots, y_m$ définies par les équations différentielles algébriques

$$F_1\left(x, \frac{dy_1}{dx}\right) = 0, \quad \ldots, \quad F_m\left(x, \frac{dy_m}{dx}\right) = 0.$$

Soit

$$(6) \qquad \Psi(x, y_1, \ldots, y_m) = 0$$

une semblable relation. Nous pouvons évidemment admettre