

Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

CAMBRIDGE LIBRARY COLLECTION

Books of enduring scholarly value

Mathematics

From its pre-historic roots in simple counting to the algorithms powering modern desktop computers, from the genius of Archimedes to the genius of Einstein, advances in mathematical understanding and numerical techniques have been directly responsible for creating the modern world as we know it. This series will provide a library of the most influential publications and writers on mathematics in its broadest sense. As such, it will show not only the deep roots from which modern science and technology have grown, but also the astonishing breadth of application of mathematical techniques in the humanities and social sciences, and in everyday life.

Cours d'analyse de l'école polytechnique

One of the great algebraists of the nineteenth century, Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922) became known for his work on matrices, Galois theory and group theory. However, his most profound effect on how we see mathematics came through his *Cours d'analyse*, which appeared in three editions. Reissued here is the first edition, which was published in three volumes between 1882 and 1887. While highly influential in its time, it now appears to us a transitional work between the partially rigorous 'epsilon delta' calculus of Cauchy and his successors, and the new 'real number' analysis of Weierstrass and Cantor. The first two volumes follow the old tradition while the third volume incorporates a substantial amount of the new analysis. Ten years later, the even more influential second edition followed the new point of view from its start. Volume 2 (1883) covers the theory of integrals.

Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

Cambridge University Press has long been a pioneer in the reissuing of out-of-print titles from its own backlist, producing digital reprints of books that are still sought after by scholars and students but could not be reprinted economically using traditional technology. The Cambridge Library Collection extends this activity to a wider range of books which are still of importance to researchers and professionals, either for the source material they contain, or as landmarks in the history of their academic discipline.

Drawing from the world-renowned collections in the Cambridge University Library and other partner libraries, and guided by the advice of experts in each subject area, Cambridge University Press is using state-of-the-art scanning machines in its own Printing House to capture the content of each book selected for inclusion. The files are processed to give a consistently clear, crisp image, and the books finished to the high quality standard for which the Press is recognised around the world. The latest print-on-demand technology ensures that the books will remain available indefinitely, and that orders for single or multiple copies can quickly be supplied.

The Cambridge Library Collection brings back to life books of enduring scholarly value (including out-of-copyright works originally issued by other publishers) across a wide range of disciplines in the humanities and social sciences and in science and technology.

Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

Cours d'analyse de l'école polytechnique

VOLUME 2: CALCUL INTÉGRAL;
INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES

CAMILLE JORDAN



CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

Cambridge University Press
978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:
Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies
Camille Jordan
Frontmatter
[More information](#)

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

University Printing House, Cambridge, CB2 8BS, United Kingdom

Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York

Cambridge University Press is part of the University of Cambridge.
It furthers the University's mission by disseminating knowledge in the pursuit of
education, learning and research at the highest international levels of excellence.

www.cambridge.org

Information on this title: www.cambridge.org/9781108064705

© in this compilation Cambridge University Press 2014

This edition first published 1883
This digitally printed version 2014

ISBN 978-1-108-06470-5 Paperback

This book reproduces the text of the original edition. The content and language reflect
the beliefs, practices and terminology of their time, and have not been updated.

Cambridge University Press wishes to make clear that the book, unless originally published
by Cambridge, is not being republished by, in association or collaboration with, or
with the endorsement or approval of, the original publisher or its successors in title.

Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

COURS
D'ANALYSE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)



Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. C. JORDAN,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TOME DEUXIÈME.

CALCUL INTÉGRAL.

INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

—
1883

(Tous droits réservés)

Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

PRÉFACE.

Ce second Volume a pour objet la théorie des intégrales.

Les trois premiers Chapitres sont consacrés à l'exposition des principales méthodes qui peuvent être employées pour le calcul des intégrales indéfinies, et des intégrales définies simples ou multiples.

Dans le Chapitre IV, nous passons à la considération des fonctions représentées par des intégrales définies. Après avoir exposé les règles pour la différentiation et l'intégration sous le signe \int , nous donnons une série d'applications, dont les principales ont pour objet l'intégration des différentielles totales, la théorie des intégrales eulériennes et les éléments de la théorie du potentiel.

Dans le Chapitre V, nous étudions les développements en séries trigonométriques, ainsi que celui d'une fonction de deux angles suivant les fonctions de Laplace.

Le Chapitre VI est consacré à l'étude des principes de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. Enfin le Chapitre VII contient l'exposé des éléments de la théorie des

Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

VI

PRÉFACE.

fonctions elliptiques, jusqu'à la transformation inclusive-
ment.

Outre les Traités d'ensemble sur le Calcul intégral cités dans la Préface de notre premier Volume, et les Mémoires classiques d'Abel, Cauchy, Dirichlet, Gauss et Jacobi, nous signalerons, comme nous ayant été particulièrement utiles : le Traité des intégrales définies de M. Mayer, les Leçons de Dirichlet sur le potentiel, les travaux de MM. du Bois-Reymond, Dini, Heine et Neumann sur les développements en série, les Livres de MM. Enneper et Königsberger sur les fonctions elliptiques, et surtout la Théorie des fonctions doublement périodiques de MM. Briot et Bouquet. Les Chapitres VI et VII du présent Volume ne sont guère qu'un résumé de ce bel Ouvrage.

Nous devons tous nos remerciements à M. Cyprien Seguy, pour le concours empressé qu'il a bien voulu nous donner pour la correction de nos épreuves.



Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES.

CHAPITRE I.

INTÉGRALES INDÉFINIES.

I. — *Procédés d'intégration.*

Numéros		Pages
1-3.	Intégration immédiate	1
3-4.	Décomposition en éléments simples	4
5-6.	Changement de variable	5
7-9.	Intégration par parties	6

II. — *Intégration des fractions rationnelles.*

10-19.	Décomposition en fractions simples. — Exemples	9
--------	--	---

III. — *Intégration des différentielles algébriques.*

20-22.	Intégration des différentielles dépendant d'une courbe unicursale. — Exemples	19
23-25.	Différentielles binômes. — Cas d'intégrabilité. — Formules de réduction	21
26-30.	Intégration de $f(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}) dx$	23
31.	Intégration de $f(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d}) dx$	29

IV. — *Intégrales elliptiques et hyperelliptiques.*

32-39.	Formules de réduction	29
40-47.	Réduction des intégrales elliptiques	37

V. — *Intégration des fonctions transcendantes.*

48.	Intégration de $f(e^{ax})$	45
49-50.	Intégration de $f(\sin x, \cos x) dx$	46

Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

VIII

TABLE DES MATIÈRES.

Numeros	Pages
51. Intégration de $f(x, e^{\alpha x}, \dots, \cos \alpha x, \sin \alpha x, \dots) dx$	49
52. Réduction des intégrales $\int f(x) e^{\alpha x} dx$	50
53. Des intégrales $\int f(x, \log x) dx, \int f(x, \arcsin x) dx$	51

CHAPITRE II.

INTÉGRALES DÉFINIES.

I. — Définitions.

54-60. Définition et propriétés fondamentales des intégrales définies. — Leur interprétation géométrique.....	52
61. Cas où la fonction ou le champ d'intégration deviennent infinis. — Valeur principale d'une intégrale indéterminée.....	59

II. — Calcul des intégrales définies.

62-63. Usage de l'intégrale indéfinie.....	62
64-65. Application à $\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx$, à $\int_a^b \frac{dx}{x-a-\beta i}$	64
66. Décomposition en parties.....	68
67-70. Changement de variable. — Exemples.....	69
71. Intégration par parties.....	74
72. Application à $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. — Formule de Wallis.....	75
73-74. Application à $\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n \cos z x dx$. — Incommensurabilité de π	77

III. — Calcul approché des intégrales définies.

75. Limites de la valeur d'une intégrale définie. — Théorème de la moyenne.....	80
76-77. Caractères pour reconnaître si une intégrale est finie et déterminée.....	82
78-81. Applications.....	86
82. Second théorème de la moyenne.....	89
83-85. Développement d'une intégrale en série. — Intégration et différentiation des séries.....	92
86. Développement de $\arcsin x$	93
87-89. Développement de $\int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$	94
90-92. Transformation de Landen.....	95
93. Règle de convergence pour les séries.....	98

Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

TABLE DES MATIÈRES.

IX

Numéros		Pages
94-98.	Formule d'Euler.....	99
99-108.	Interpolation. — Méthodes de Cotes et de Gauss. — Méthode des trapèzes. — Formule de Simpson.....	105
IV. — <i>Applications géométriques.</i>		
109-114.	Aire des courbes planes. — Parabole, hyperbole, cycloïde, ellipse. — Aire d'une courbe fermée.....	112
115.	Aire en coordonnées polaires.....	119
116-120.	Rectification des courbes. — Cycloïde, parabole, ellipse....	120
120.	Rectification des courbes gauches.....	123

CHAPITRE III.

INTÉGRALES MULTIPLES.

121-124.	Volumes. — Définition et mode de calcul — On peut renverser l'ordre des intégrations.....	124
125.	Volume du tétraèdre trirectangle....	130
126-127.	Volume en coordonnées curvilignes. — Application au solide de Viviani....	131
128-130.	Aire des surfaces courbes.....	135
131.	Aire et volume des surfaces réglées.....	137
132.	Aire et volume des surfaces de révolution.....	138
133-136.	Aire et volume de l'ellipsoïde.....	138
137-141.	Masses, centres de gravité, moments d'inertie. Leur calcul par des intégrales triples.....	141
142.	Moment d'inertie d'une sphère.....	145
143-146.	Intégrales multiples. — Changements de variables.....	146
147-150.	Définition des intégrales multiples, quand la fonction ou le champ d'intégration deviennent infinis. — Condition d'existence de l'intégrale.....	149
151-153.	Exceptions aux théorèmes démontrés sur les intégrales multiples. — Démonstration donnée par Gauss de l'existence d'une racine pour toute équation algébrique.....	154

CHAPITRE IV.

DES FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

I. — *Différentiation et intégration sous le signe \int .*

154-155.	Différentiation par rapport aux limites.....	158
156-162.	Différentiation par rapport à un paramètre.....	159
163.	Intégration sous le signe \int	164
164-165.	Intégration des différentielles totales.....	164

Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

X		TABLE DES MATIÈRES.
Numéros.		Pages
166-167.	Calcul de $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$, de $\int_0^\infty y^{2n} e^{-ay^2} dy$	167
168-169.	Calcul de $\int_0^\infty e^{-ay^2} \cos 2by dy$, de $\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx$	168
170-172.	Calcul de $\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} dx$	170
173-174.	Calcul de $\int_0^\infty \left(\frac{A e^{-ax}}{x^a} + \frac{B e^{-bx}}{x^b} + \dots \right) dx$	174

II. — Intégrales eulériennes.

175.	Différentes formes de l'intégrale $\Gamma(n)$	177
176.	Son expression par un produit infini.....	178
177.	$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$	180
178-182.	Expression de $\log \Gamma(n)$ par une intégrale définie. — Son développement en série.....	180
183-185.	Théorème de Bernoulli.....	187
186-187.	Intégrale eulérienne de première espèce. — Son expression par les fonctions Γ	190
188-189.	Réduction de l'intégrale	

$$\iiint f \left[\left(\frac{x}{a} \right)^\alpha + \left(\frac{y}{b} \right)^\beta + \left(\frac{z}{c} \right)^\gamma \right] x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dx dy dz.$$

— Moment d'inertie de l'ellipsoïde..... 192

III. — Potentiel.

190-191.	Définition du potentiel. Son équation aux dérivées partielles pour un point extérieur à la masse attirante.....	194
192-199.	Cas du point intérieur.....	196
200-202.	Réduction à des intégrales doubles quand la densité est constante.....	202
203-206.	Attraction d'un ellipsoïde homogène. — Cas d'une sphère... ..	204
207-210.	Potentiel d'une surface. — Discontinuité de l'attraction. ...	208
211-215.	Théorèmes de Green.....	212

CHAPITRE V.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

I. — Formules de Fourier.

216-222.	Théorème de M. du Bois-Reymond.....	216
223-229.	Intégrales de Fourier.....	220
230-231.	Intégrales analogues formées avec les fonctions X_n	226

Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

TABLE DES MATIÈRES.

XI

II. — <i>Séries trigonométriques.</i>		Pages
Numéros		
232.	Développements en sinus et cosinus. — Calcul des coefficients.	228
233-235.	Sommation des séries obtenues.....	230
236-238.	Autres développements analogues.....	234
III. — <i>Fonctions de Laplace.</i>		
239-242.	Définition et propriétés fondamentales.....	236
243-248.	Développement d'une fonction de deux angles en fonctions de Laplace.....	240
249-251.	Développement d'une fonction d'une seule variable en fonctions de Legendre.....	244
252-255.	Développement suivant les réduites de l'intégrale $\int_a^b \frac{f(z) dz}{x-z}$.	248

CHAPITRE VI.

VARIABLES IMAGINAIRES.

I. — <i>Fonctions d'une variable imaginaire.</i>		
256-257.	Définition. — Interprétation géométrique.....	252
258-260.	Étude des fractions rationnelles. — Des fonctions $e^{\frac{1}{z}}$ et $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$.	256
261-265.	Étude de $\log z$ et de $(z-a)^n$	257
266-272.	Fonctions algébriques.....	264
273-274.	Fonctions monodromes ou non monodromes — Points critiques, leur classification.....	270
II. — <i>Intégrales des fonctions monodromes.</i>		
275-278.	Intégrales définies. — Leurs propriétés élémentaires.....	272
279-284.	Déformation de la ligne d'intégration. — Théorème des résidus.....	275
285-286.	Cas où l'intégrale prise sur un cercle de rayon infiniment petit ou infini est nulle.....	283
287.	Valeur principale de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	284
288.	Application à $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$	288
289.	Valeur principale de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} f(x) dx$	289
290.	Application à $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{a^2+x^2} dx$	290
291.	Calcul de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos 2at dt$	291
292-296.	Expression des fonctions X_n par des intégrales définies.....	293

Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

XII

TABLE DES MATIÈRES.

III. — *Théorèmes généraux sur les fonctions monodromes.*

Numeros	Pages
297-300. Expression d'une fonction arbitraire et de ses dérivées par des intégrales définies.....	297
301-302. Série de Taylor.....	300
303-304. Série de Laurent.....	302
305-306. Zéros et pôles des fonctions monodromes. — Leur degré de multiplicité est entier.....	304
307-309. Valeur de l'intégrale $\int \frac{f'(z)}{f(z)} dz$. — Existence des racines des équations algébriques.....	305
310. Série de Lagrange.....	307
311. Série de Fourier.....	310
312-314. Toute fonction sans point critique est une constante. — Une fonction qui n'a que des pôles est rationnelle.....	312
315-317. Fonctions entières. — Théorème de M. Weierstrass.....	314
318-321. Fonctions méromorphes. — Théorème de M. Mittag-Leffler.....	317
322-323. Fonctions qui ont n valeurs et dont les points critiques sont algébriques.....	322

IV. — *Fonctions doublement périodiques.*

324-326. Une fonction méromorphe ne peut avoir plus de deux périodes distinctes... ..	324
327-336. Construction d'une fonction doublement périodique par ses zéros et ses pôles.....	328
337-338. Théorème de M. Hermite.....	333
339-342. Relation entre deux fonctions ayant les mêmes périodes. — Entre une fonction doublement périodique et sa dérivée... ..	335

CHAPITRE VII.

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

I. — *Intégrales des fonctions algébriques.*

343-345. Diverses valeurs de l'intégrale d'une fonction algébrique....	339
346. Application à l'intégrale elliptique de première espèce.....	343
347-349. Théorème d'Abel.....	345
350-351. Application à l'intégrale elliptique.....	349

II. — *Définition et premières propriétés des fonctions elliptiques.*

352-353. Définition des trois fonctions elliptiques.....	352
354-356. Elles sont méromorphes et doublement périodiques.....	354
357-358. Résolution des équations $\operatorname{sn} u = \operatorname{sn} \alpha$, $\operatorname{cn} u = \operatorname{cn} \alpha$, $\operatorname{dn} u = \operatorname{dn} \alpha$. — Zéros et pôles des trois fonctions.....	358

Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

TABLE DES MATIÈRES.

XIII

Numeros	Pages
359-363. Valeur de $\operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega}{2}\right)$, $\operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega'}{2}\right)$, etc	361
364-367. Propriétés des périodes. — Périodes elliptiques.....	365
368. Cas où le module est réel, positif et < 1	369
369-372. Addition des arguments. — Multiplication	371
<i>III. — Développements des fonctions elliptiques.</i>	
373. Développement par la série de Maclaurin	375
374-376. Développement par la série de Fourier.....	376
377-378. Développement en série de fractions	381
379-389. Expression des fonctions elliptiques par les fonctions θ	382
390-392. Relations entre les fonctions θ . — Nouvelle démonstration des formules d'addition.....	394
<i>IV. — Transformation.</i>	
393-395. Énoncé du problème. — Relations entre les périodes.....	397
396. Simplification du problème.....	398
397-400. Transformations du premier degré.....	399
401-403. Transformations du premier degré pour les fonctions θ	403
404. Division de la première période par 2.....	406
405. Division de la deuxième période par 2.....	408
406. Division de la première période par un nombre impair....	411
407. Division de la deuxième période par un nombre impair....	414
408. Multiplication de l'argument.....	414
409-415. Division de l'argument.....	416
416-420. Équation modulaire.....	422
<i>V. — Intégrales elliptiques de seconde et de troisième espèce.</i>	
421-423. Intégrale de seconde espèce.....	426
424-426. Intégrale de troisième espèce	428
427. Relations entre les périodes	431

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Cambridge University Press

978-1-108-06470-5 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 2:

Calcul Intégral; Intégrales Définies et Indéfinies

Camille Jordan

Frontmatter

[More information](#)

ERRATA.

Pages	Lignes	au lieu de	lisez
14	21, 22, 25	p, q	P_1, Q_1
15	3	Id.	Id.
64	18	{ dans le premier ou le } { quatrième quadrant }	entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$
74	16	fini et déterminé.	continu.
125	17	$d\sigma', d\sigma$	$\Delta\sigma', \Delta\sigma$
159	9	de a et b	de a à b
203	2	+	—
221	6	\int_0	\int_0^b
225	8	finie et déterminée	finie
246	4	$a_{\nu+2k}$	$a_{\nu-}$
246	18	il deviendra	il viendr
314	28	$f(a-t)$	$f(a+t)$