COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

DEUXIÈME PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES.

CHAPITRE I.

INTÉGRALES INDÉFINIES.

I. — Procédés d'intégration.

1. La première question traitée dans le Calcul différentiel était la suivante :

Une fonction $f(x)$ étant donnée, trouver sa dérivée.

Le Calcul intégral devra donc débuter par le problème inverse :

Trouver les fonctions qui ont pour dérivée une fonction donnée $f(x)$.

On doit tout d'abord se demander si ce problème admet des solutions. Cette question, envisagée dans toute sa généralité, est assez délicate. Nous nous bornerons à énoncer le théorème suivant, que nous nous réservons de démontrer ultérieurement :

THÉORÈME. — *Si la fonction $f(x)$ est continue pour toutes les valeurs de x comprises entre $x = a$ et $x = b$, il existera une fonction $F(x)$ ayant pour dérivée $f(x)$, dans le même intervalle.*

On voit d'ailleurs immédiatement qu'il existe une infinité de fonctions ayant également $f(x)$ pour dérivée, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$. Ces fonctions auront pour forme générale $F(x) + C$, où C est une constante arbitraire.

Soit, en effet, $\Phi(x)$ une de ces fonctions : $\Phi(x) - F(x)$, ayant pour dérivée $f(x) - f(x) = 0$, sera une constante, d'ailleurs quelconque.

Ces fonctions en nombre infini qui ont pour dérivée $f(x)$, et pour différentielle $f(x)\,dx$, se nomment les *fonctions primitives* de $f(x)$, ou les *intégrales* de la différentielle $f(x)\,dx$. On les représente par la notation

$$\int f(x)\,dx,$$

en sous-entendant la constante arbitraire qui les distingue les unes des autres.

2. Les résultats trouvés dans le Calcul différentiel nous permettent d'écrire immédiatement les intégrales d'un certain nombre de différentielles simples.

1° On sait, par exemple, que $(x-a)^m$ a pour différentielle $m(x-a)^{m-1}\,dx$. Changeant m en $m+1$, et divisant par $m+1$, ce qui est permis si $m \gtrless -1$, on voit que $\frac{(x-a)^{m+1}}{m+1}$ a pour différentielle $(x-a)^m\,dx$. Ayant ainsi une des intégrales de $(x-a)^m\,dx$, on aura pour la forme générale de ces intégrales

$$\int (x-a)^m\,dx = \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} + C.$$

2° Examinons le cas particulier où $m = -1$, qui échappe à l'analyse précédente.

Si a est réel, on sait que $\frac{dx}{x-a}$ est la différentielle de $\log(x-a)$. Ce résultat subsiste encore si a est imaginaire. Soit, en effet, $a = \alpha + \beta i$. On aura par définition

$$\log(x-\alpha-\beta i) = \tfrac{1}{2}\log[(x-\alpha)^2+\beta^2] + i \operatorname{arc\,tang} \frac{-\beta}{x-\alpha}$$
$$= \tfrac{1}{2}\log[(x-\alpha)^2+\beta^2] + i \operatorname{arc\,tang} \frac{x-\alpha}{\beta} - \frac{i\pi}{2}.$$

Sa différentielle sera

$$\frac{(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx + \frac{i\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx$$

ou, en réunissant les deux fractions et supprimant le facteur $x-\alpha+i\beta$, commun au numérateur et au dénominateur,

$$\frac{dx}{x-\alpha-\beta i}.$$

Donc, $\log(x-a)$ est bien l'une des intégrales de $\frac{dx}{x-a}$, même lorsque a est imaginaire. On aura, par suite,

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log(x-a) + C.$$

3° On a

$$d \operatorname{arc\,tang} x = \frac{dx}{1+x^2};$$

donc

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + C.$$

4° On a

$$de^{mx} = me^{mx}\,dx, \quad \text{d'où} \quad d\,\frac{e^{mx}}{m} = e^{mx}\,dx;$$

donc

$$\int e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}}{m} + C.$$

5° On a

$$d\sin mx = \quad m\cos mx\,dx, \quad \text{ou} \quad d\,\frac{\sin mx}{m} = \cos mx\,dx,$$

$$d\cos mx = -\,m\sin mx\,dx, \quad \text{ou} \quad d\,\frac{\cos mx}{-m} = \sin mx\,dx;$$

donc

$$\int \cos mx\,dx = \frac{\sin mx}{m} + C,$$

$$\int \sin mx\,dx = -\,\frac{\cos mx}{m} + C.$$

6° On a

$$d\,\text{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x + C.$$

Etc.

3. Sans multiplier davantage ces exemples, nous allons exposer les principaux artifices à l'aide desquels on peut effectuer l'intégration des différentielles plus compliquées. Ces artifices sont au nombre de trois.

1° *Décomposition en éléments simples.* — Soit

$$f(x) = a\,\varphi(x) + b\,\psi(x) + \ldots,$$

a, b étant des constantes.

On aura évidemment

$$\int f(x)\,dx = a\int \varphi(x)\,dx + b\int \psi(x)\,dx + \ldots,$$

et, si l'on sait calculer les diverses intégrales du second membre, leur somme donnera l'intégrale cherchée

$$\int f(x)\,dx.$$

Une fonction quelconque $f(x)$ pouvant être décomposée en plusieurs parties d'une infinité de manières, on tâchera d'effectuer cette décomposition de telle sorte que chaque partie, prise isolément, soit intégrable.

4. *Exemple.* — Supposons que $f(x)$ soit une fonction entière

$$f(x) = ax^m + bx^n + \ldots.$$

On aura immédiatement

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= a\int x^m\,dx + b\int x^n\,dx + \ldots \\ &= \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} + \ldots + \mathrm{C}.\end{aligned}$$

5. 2° *Changement de variable.* — Soit à trouver une intégrale y de l'expression $f(x)\,dx$. Posons $x = \varphi(t)$, t étant une nouvelle variable. On en déduira

$$dx = \varphi'(t)\,dt.$$

Cela posé, y ayant $f(x)$ pour dérivée par rapport à x, sa dérivée par rapport à t sera

$$f(x)\frac{dx}{dt} = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

On aura donc

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

La transformation de l'intégrale s'obtiendra donc en remplaçant, sous le signe $\int$, x et dx par les valeurs $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)\,dt$.

Si l'on sait intégrer l'expression transformée, on aura y exprimé en fonction de t; et, pour l'obtenir en fonction de x, il suffira d'y remplacer t par sa valeur tirée de l'équation $x = \varphi(t)$.

6. *Exemple*. — Soit à calculer l'intégrale

$$y = \int \frac{Ax + B}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\, dx.$$

On a identiquement

$$Ax + B = A(x-\alpha) + A\alpha + B$$

et, par suite,

$$y = \int \frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\, dx + \int \frac{A\alpha + B}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\, dx.$$

Pour calculer la première intégrale, on posera

$$(x-\alpha)^2 + \beta^2 = t, \quad \text{d'où} \quad 2(x-\alpha)\, dx = dt,$$

et, par suite,

$$\int \frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\, dx = \int \frac{A}{2}\frac{dt}{t} = \frac{A}{2}\log t + \text{const.}$$
$$= \frac{A}{2}\log[(x-\alpha)^2 + \beta^2] + \text{const.}$$

Dans la seconde intégrale, nous poserons

$$x - \alpha = \beta t, \quad \text{d'où} \quad dx = \beta\, dt$$

et, par suite,

$$\int \frac{A\alpha + B}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\, dx = \int \frac{A\alpha + B}{\beta}\frac{dt}{1+t^2}$$
$$= \frac{A\alpha + B}{\beta}\operatorname{arc\,tang} t + \text{const},$$
$$= \frac{A\alpha + B}{\beta}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta} + \text{const.}$$

7. 3° *Intégration par parties*. — Ce procédé est fondé sur la formule connue

$$d\,uv = u\,dv + v\,du = uv'\,dx + vu'\,dx,$$

où v, u sont deux fonctions quelconques de x.

On en déduit, en intégrant les deux membres,

$$uv = \int uv'\,dx + \int vu'\,dx.$$

Cette équation permet de calculer l'une des deux intégrales $\int uv'\,dx$, $\int vu'\,dx$, lorsque l'autre sera connue.

Pour appliquer cette remarque à l'intégration d'une expression telle que $\int f(x)\,dx$, il faut décomposer $f(x)$ en un produit de deux facteurs u et v', dont le second soit la dérivée d'une fonction connue, ces deux facteurs étant d'ailleurs choisis de telle sorte que l'intégrale $\int vu'\,dx$ soit plus simple à obtenir que la proposée, laquelle sera alors donnée par la formule

$$\int f(x)\,dx = \int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx.$$

8. *Exemple.* — Soit proposé d'intégrer l'expression

$$\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n},$$

où n est un entier positif.

Nous la simplifierons d'abord par un changement de variable, en posant $x - \alpha = \beta t$, d'où $dx = \beta\,dt$.

L'intégrale cherchée deviendra

$$\int \frac{dt}{\beta^{2n-1}(1+t^2)^n} = \frac{1}{\beta^{2n-1}} \mathrm{I}_n$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{I}_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

Cette intégrale peut s'écrire ainsi

$$\mathrm{I}_n = \int \frac{(1+t^2-t^2)\,dt}{(1+t^2)^n}$$
$$= \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n} = \mathrm{I}_{n-1} - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n}.$$

Nous appliquerons à cette dernière intégrale le procédé d'intégration par parties, en posant

$$u = t, \quad v' = \frac{t}{(1+t^2)^n},$$

ce dernier facteur étant la dérivée de la fonction

$$v = \frac{1}{2(1-n)} \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}.$$

Appliquant la formule générale, il viendra

$$\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)} \frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{1}{2(1-n)} \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}\,dt$$
$$= -\frac{1}{2n-2} \frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \mathrm{I}_{n-1}.$$

Substituant cette valeur dans l'expression de I_n, il vient

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} + \frac{1}{2n-2} \frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} \mathrm{I}_{n-1}$$
$$= \frac{1}{2n-2} \frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \mathrm{I}_{n-1}.$$

Cette formule ramène le calcul de l'intégrale I_n à celui de l'intégrale plus simple I_{n-1}. Celle-ci pourra de même se ramener à l'intégrale I_{n-2} au moyen de la formule

$$\mathrm{I}_{n-1} = \frac{1}{2n-4} \frac{t}{(1+t^2)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2n-4} \mathrm{I}_{n-2},$$

qui se déduit de la précédente en y changeant n en $n-1$, et ainsi de suite. On se trouvera ramené en dernier lieu à l'intégrale connue

$$\mathrm{I}_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tang} t + \text{const.}$$

9. La formule de l'intégration par parties est susceptible d'une généralisation souvent utile.

Supposons que la fonction $f(x)$ soit décomposée en un produit de deux autres fonctions u et $\mathrm{D}^m v$, dont la dernière soit la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'une fonction connue v. On aura, en intégrant par parties ($D^m v$ étant la dérivée de $D^{m-1} v$),

$$\int f(x)\,dx = \int u D^m v\,dx = u D^{m-1} v - \int Du\, D^{m-1} v\,dx.$$

Mais $D^{m-1} v$ étant la dérivée de $D^{m-2} v$, une nouvelle intégration par parties donnera

$$\int Du\, D^{m-1} v\,dx = Du\, D^{m-2} v - \int D^2 u\, D^{m-2} v\,dx,$$

et en substituant cette valeur

$$\int u D^m v\,dx = u\, D^{m-1} v - Du\, D^{m-2} v + \int D^2 u\, D^{m-2} v\,dx.$$

Si $m > 2$, on pourra encore intégrer par parties; continuant ainsi, on trouvera la formule

$$\int u D^m v\,dx$$
$$= u D^{m-1} v - D u D^{m-2} v + D^2 u D^{m-3} v - \ldots + (-1)^m \int D^m u . v\,dx.$$

II. — Intégration des fractions rationnelles.

10. Soit à intégrer l'expression

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx,$$

où $f(x)$ et $F(x)$ sont deux polynômes entiers, ayant respectivement pour degrés m et n.

Si $m \geqq n$, on ordonnera ces deux polynômes suivant les puissances décroissantes de x, et l'on effectuera la division, en s'arrêtant au moment où il faudrait écrire au quotient des puissances négatives de x.

On aura pour quotient un polynôme $Q(x)$ de degré $m - n$, et pour reste un polynôme $R(x)$ de degré $< n$.

Cela posé, de l'égalité

$$\frac{f(x)}{F(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{F(x)}$$

on déduira

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{F(x)}\,dx.$$

$Q(x)$ étant une fonction entière, on pourra calculer l'intégrale $\int Q(x)\,dx$.

11. Reste à déterminer l'intégrale $\int \frac{R(x)}{F(x)}\,dx$, dans laquelle le numérateur $R(x)$ est d'un degré moins élevé que le dénominateur et peut être supposé n'avoir avec lui aucun facteur commun; car, s'il existait un semblable facteur, on n'aurait qu'à le supprimer.

A cet effet, on décomposera $\frac{R(x)}{F(x)}$ en fractions simples, en s'appuyant sur le théorème suivant, dont nous rappelons brièvement la démonstration.

Théorème. — *Soient $a, b, \ldots$ les racines de l'équation $F(x) = 0$; $\alpha, \beta, \ldots$ leurs degrés de multiplicité; on aura*

$$\frac{R(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$$
$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ *étant des constantes convenablement choisies.*

En effet, posons, pour abréger, $(x-b)^\beta \ldots = \varphi(x)$, et soit A une constante indéterminée; nous aurons

$$\frac{R(x)}{F(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{R(x)}{(x-a)^\alpha \varphi(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{R(x) - A\varphi(x)}{(x-a)^\alpha \varphi(x)}.$$