CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-06469-9 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 1: Calcul Différentiel
Camille Jordan
Excerpt
More information

INTRODUCTION.

I. Les Mathématiques sont la science des quantités. Elles se divisent en plusieurs branches, suivant la nature des grandeurs soumises au calcul. On y distingue principalement l'Arithmétique, la Géométrie, la Mécanique, la Physique mathématique, le Calcul des probabilités.

Ces diverses branches ont pour lien commun l'Algèbre, qu'on pourrait définir le *calcul des opérations*.

II. On peut établir dans les Mathématiques une autre classification, fondée, non plus sur l'objet de la science, mais sur ses methodes. A ce nouveau point de vue, nous aurions à distinguer deux sortes d'Analyse :

1° Celle des quantités discontinues;

2° Celle des quantités continues.

Dans la première, on cherche les relations qui existent entre certaines quantités fixes données *a priori*. Cette méthode est employée dans les parties élémentaires des Mathématiques, et plus spécialement en Arithmétique et au début de la Géométrie, sauf pour un petit nombre de théorèmes fondamentaux, dont la démonstration exige la notion des quantités incommensurables.

Dans l'Analyse des quantités continues, on considère au contraire les éléments de la question proposée comme susceptibles de varier par degrés insensibles, et l'on cherche à déterminer les lois qui régissent leurs variations simultanées.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

Cambridge University Press
978-1-108-06469-9 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 1: Calcul Différentiel
Camille Jordan
Excerpt
More information

Cette méthode, dont Euclide et Archimède avaient donné autrefois de remarquables exemples, était tombée en oubli pendant plusieurs siècles, lorsque la mémorable découverte de Descartes sur l'application de l'Algèbre à la théorie des courbes obligea les géomètres à y revenir, pour résoudre les deux questions qui s'imposaient à eux, le problème des tangentes et celui des quadratures.

III. L'ancienne définition de la tangente, *une droite qui n'a qu'un point commun avec la courbe,* cessait en effet d'être applicable en dehors des coniques. On dut en imaginer une nouvelle, ainsi conçue :

La tangente est la limite vers laquelle tend une sécante qui tourne autour d'un de ses points d'intersection avec la courbe, lorsque son second point d'intersection se rapproche indéfiniment du premier.

IV. Cherchons, d'après cette définition, la tangente à la parabole $y = x^2$ au point dont les coordonnées sont x, y. Soient $x+h$, $y+k$ les coordonnées d'un second point de la courbe. La sécante qui les joint aura pour équation

$$\mathrm{Y} - y = \frac{k}{h}(\mathrm{X} - x).$$

On a d'ailleurs

$$y = x^2, \quad y + k = (x+h)^2,$$

d'où

$$k = 2hx + h^2, \quad \frac{k}{h} = 2x + h,$$

et par suite

$$\mathrm{Y} - y = (2x+h)(\mathrm{X} - x).$$

Si le second point se rapproche du premier, h tend vers zéro ; on aura donc, pour l'équation de la tangente,

$$\mathrm{Y} - y = 2x(\mathrm{X} - x).$$

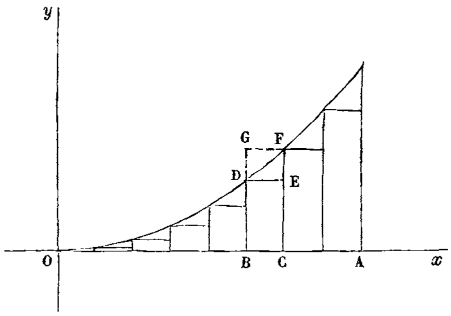
V. Pour donner une idée du problème des quadratures, nous allons chercher l'aire comprise entre la parabole, l'axe

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

Cambridge University Press
978-1-108-06469-9 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 1: Calcul Différentiel
Camille Jordan
Excerpt
More information

des x et une droite $x = a$, parallèle aux y. Divisons la distance $OA = a$ en n parties égales (*fig.* 1), et soit $h = \frac{a}{n}$ la longueur de chacune d'elles. Traçons les ordonnées correspondantes, et par les points où elles rencontrent la courbe menons des parallèles à l'axe des x. L'aire cherchée S sera ainsi décomposée en une somme de trapèzes curvilignes dont chacun sera lui-même composé d'un rectangle et d'un triangle curviligne.

Fig. 1.



L'aire de chaque rectangle est facile à évaluer. Soit BCDE le ($m + 1^{\text{ième}}$) d'entre eux. On aura

$$OB = \frac{ma}{n},$$

d'où

$$BD = \frac{m^2 a^2}{n^2} \quad \text{et} \quad BC = \frac{a}{n},$$

et enfin

$$BCDE = \frac{m^2 a^3}{n^3}.$$

La somme des aires des rectangles sera donc

$$\frac{a^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] = \frac{a^3 n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$
$$= \frac{a(a-h)(2a-h)}{6}.$$

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-06469-9 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 1: Calcul Différentiel
Camille Jordan
Excerpt
More information

Les triangles seraient plus difficiles à évaluer; mais on peut avoir une limite supérieure de l'aire de chacun d'eux. Soit, en effet, $EF = k_m$ la hauteur du triangle DEF. Il est plus petit que le rectangle DEFG, dont l'aire est hk_m.

On aura donc

$$S > \frac{a(a-h)(2a-h)}{6} < \frac{a(a-h)(2a-h)}{6} + h(k_1 + \ldots + k_n),$$

et, *a fortiori,* en remplaçant les n quantités $k_1, \ldots, k_n$ par la plus grande d'entre elles k et remarquant que $nh = a$,

$$S < \frac{a(a-h)(2a-h)}{6} + ak.$$

Faisons maintenant tendre h vers zéro; k tendant également vers zéro, les deux quantités entre lesquelles S se trouve comprise tendront toutes deux vers la limite commune $\frac{a^3}{3}$. Donc $S = \frac{a^3}{3}$.

VI. Les solutions des deux problèmes précédents offrent ce caractère commun de reposer sur l'introduction d'une quantité h, que l'on fait tendre vers zéro.

Lorsqu'une quantité variable tend ainsi vers zéro ou vers ∞, on dit qu'elle est *infiniment petite* ou *infiniment grande.*

Mais il ne faut pas se laisser égarer par ces dénominations. Il n'y a pas, à proprement parler, d'infiniment petit, une quantité plus petite que toute quantité donnée étant évidemment nulle. Quant à l'infini, il échappe à toute mesure et ne saurait entrer dans un calcul.

Les deux questions que nous venons de traiter mettent d'ailleurs en évidence les deux manières de faire intervenir les infiniment petits dans l'Analyse :

1° Ou bien les quantités que l'on cherche se déterminent comme le coefficient angulaire de la tangente, en trouvant la limite du rapport de deux quantités infiniment petites;

2° Ou bien on les divise (comme l'aire S) en éléments

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-06469-9 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 1: Calcul Différentiel
Camille Jordan
Excerpt
More information

infiniment petits (les trapèzes curvilignes) que l'on décompose eux-mêmes en deux autres (rectangle et triangle), de telle sorte que l'une des deux sommes (celle des rectangles) ait une limite facile à évaluer et l'autre (celle des triangles) une limite nulle.

VII. Soient h une quantité infiniment petite, k une quantité qui en dépende. Lorsque h tend vers zéro, il peut se faire que $\frac{k}{h}$ ne tende vers aucune limite déterminée. Soit, par exemple, $k = h \sin \frac{1}{h}$. Il est clair que le rapport $\frac{k}{h} = \sin \frac{1}{h}$ oscillera indéfiniment entre $+1$ et -1 à mesure que h se rapprochera de zéro.

Supposons au contraire que $\frac{k}{h}$ tende vers une limite déterminée. Suivant que cette limite sera nulle, finie ou infinie, on dira que k est un infiniment petit d'un ordre supérieur, égal ou inférieur à l'ordre de h.

On précisera cette notion en disant que k est d'ordre α *par rapport à* h, si le rapport $\frac{k}{h^\alpha}$ tend vers une limite finie et différente de zéro, lorsque h se rapproche de zéro. D'après cette définition, h sera du premier ordre, une quantité finie sera d'ordre zéro, une quantité infinie sera d'ordre négatif.

VIII. Si k est d'ordre α, on aura

$$\frac{k}{h^\alpha} = A + \varepsilon,$$

A étant une quantité finie et ε un infiniment petit. On en déduit

$$k = A h^\alpha + \varepsilon h^\alpha.$$

Le premier terme de cette expression se nomme la *valeur principale* de k. Il représente k avec une erreur relative d'autant plus faible que h sera plus petit.

Si cette première approximation ne suffit pas, on cherchera

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

Cambridge
Cambridge University Press
978-1-108-06469-9 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 1: Calcul Différentiel
Camille Jordan
Excerpt
More information

la valeur principale du terme complémentaire εh^α. Soit

$$\varepsilon h^\alpha = B h^\beta + \varepsilon_1 h^\beta,$$

B étant fini et ε_1 infiniment petit. Nous aurons pour k cette seconde valeur

$$k = A h^\alpha + B h^\beta,$$

approchée jusqu'à l'ordre β.

On chercherait de même, si c'était nécessaire, la valeur principale de $\varepsilon_1 h^\beta$, et ainsi de suite.

IX. La détermination des valeurs principales des infiniment petits, et leur développement en série suivant les puissances de h, qui en est la conséquence, formeront l'objet de la première Partie de ce Cours.

La solution de ce problème fondamental fournit une méthode d'approximation précieuse dans toutes les applications des Mathématiques; mais là ne se borne pas son utilité : elle permet d'obtenir, comme nous allons le montrer, des résultats d'une rigueur absolue.

Supposons qu'une quantité inconnue x soit égale à la limite du rapport de deux infiniment petits du même ordre, k et l, ayant respectivement pour valeurs principales $A h^\alpha$ et $B h^\alpha$. On aura rigoureusement

$$x = \frac{A}{B}.$$

On a, en effet,

$$k = A h^\alpha (1 + \varepsilon), \quad l = B h^\alpha (1 + \eta),$$

ε et η étant des quantités infiniment petites. On en déduit

$$\frac{k}{l} = \frac{A(1+\varepsilon)}{B(1+\eta)} = \frac{A}{B} + \frac{A(\varepsilon - \eta)}{B(1+\eta)},$$

et, en passant à la limite,

$$x = \frac{A}{B} + \lim \frac{A(\varepsilon - \eta)}{B(1+\eta)} = \frac{A}{B},$$

ε et η ayant pour limite zéro.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

Cambridge
Cambridge University Press
978-1-108-06469-9 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 1: Calcul Différentiel
Camille Jordan
Excerpt
More information

X. Supposons, d'autre part, que pour obtenir une quantité inconnue x nous l'ayons décomposée en une somme d'éléments infiniment petits $k_1, k_2, \ldots$, tous positifs.

Soient $m_1, m_2, \ldots$ les valeurs principales de ces éléments. On aura

$$k_1 = m_1(1+\varepsilon_1),$$
$$k_2 = m_2(1+\varepsilon_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x = k_1 + k_2 + \ldots = m_1 + m_2 + \ldots + \varepsilon_1 m_1 + \varepsilon_2 m_2 + \ldots,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ étant des quantités infiniment petites. Soient ε et η la plus petite et la plus grande d'entre elles. On aura évidemment

$$x \overline{\gtrless} (m_1 + m_2 + \ldots)(1+\varepsilon) \overline{\lessgtr} (m_1 + m_2 + \ldots)(1+\eta),$$

d'où, en passant à la limite,

$$x = \lim(m_1 + m_2 + \ldots).$$

On a donc ce théorème :

Dans l'évaluation de la limite d'un rapport ou d'une somme d'infiniment petits, on peut, sans erreur aucune, remplacer ces infiniment petits par leurs valeurs principales.

XI. La considération des infiniment petits était familière aux géomètres du XVII^e siècle; mais c'est à Newton et à Leibnitz que revient la gloire d'en avoir formé un corps de doctrine systématique, qui porte le nom de *Calcul infinitésimal* ou *Théorie des fonctions*. Ce nouveau Calcul, développé par leurs successeurs, et principalement par les Bernoulli, d'Alembert, Euler, Lagrange, Cauchy, Gauss, Abel et Jacobi, formera l'objet de ce Cours. Il se divise en deux branches distinctes : le Calcul différentiel et le Calcul intégral.

Le Calcul différentiel résout le problème suivant :

Connaissant les relations qui lient plusieurs quantités variables, trouver celles qui existent entre leurs variations infiniment petites.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-06469-9 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 1: Calcul Différentiel
Camille Jordan
Excerpt
More information

Le Calcul intégral pose la question inverse :

Des relations qui lient les variations, déduire celles qui existent entre les variables.

Dans les applications de l'Analyse aux phénomènes naturels, ces deux problèmes pourraient se formuler ainsi :

1° *Des effets étant mesurés, remonter à leurs causes.*
2° *Les causes étant connues, calculer leurs effets.*

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE
Cambridge University Press
978-1-108-06469-9 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 1: Calcul Différentiel
Camille Jordan
Excerpt
More information

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFERENTIEL.

CHAPITRE I.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES.

I. — Définitions.

1. Si deux quantités variables x et y sont liées entre elles par une relation, on peut choisir arbitrairement l'une d'elles comme *variable indépendante,* et l'on dira que l'autre variable est une *fonction* de la première.

Soient, plus généralement, $x, y, z, \ldots$ des variables en nombre $m+n$, liées entre elles par m relations. On pourra choisir n de ces quantités pour variables indépendantes, et les autres en seront des fonctions.

Une fonction d'une variable x peut se désigner par le symbole $f(x)$; si l'on considère simultanément plusieurs fonctions différentes, on pourra les désigner respectivement par

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-06469-9 - Cours d'analyse de l'école Polytechnique: Volume 1: Calcul Différentiel
Camille Jordan
Excerpt
More information

$F(x)$, $\varphi(x)$, ... en changeant la lettre initiale de la notation précédente.

Une fonction de plusieurs variables x, y, ... se représente par la notation analogue $f(x, y, \ldots)$.

2. Nous allons passer rapidement en revue les diverses fonctions d'une variable que fournissent les éléments des Mathématiques.

1° On rencontre d'abord les *polynômes,* ou *fonctions entières,* définies par des équations de la forme

$$y = Ax^m + Bx^n + \ldots,$$

où m, n, ... sont des entiers et A, B, ... des constantes.

Leur propriété fondamentale, démontrée pour la première fois par d'Alembert, est exprimée par le théorème suivant, qui sera établi dans ce Cours :

Toute fonction entière de degré m peut être décomposée en un produit de m facteurs du premier degré (*à coefficients réels ou imaginaires*).

2° En second lieu viennent les *fractions rationnelles,* qui s'obtiennent en formant le quotient de deux polynômes.

La fraction rationnelle est dite *simple* si elle a pour numérateur une constante, et pour dénominateur un polynôme du premier degré, ou une puissance d'un semblable polynôme.

Nous verrons que *toute fraction rationnelle peut être exprimée par la somme d'une fonction entière et d'un certain nombre de fractions simples.*

3° Les deux classes de fonctions qui précèdent rentrent comme cas particuliers dans celle des *fonctions algébriques,* définies par une équation de la forme

$$Ax^m y^\mu + Bx^n y^\nu + \ldots = 0,$$

où les coefficients A, B, ... sont des constantes, et les exposants m, μ, n, ν, ... des entiers.

Soit μ le degré de l'équation par rapport à y; *à chaque*

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org