SUITE DU MÉMOIRE INTITULÉ :

# THÉORIE

DU

# MOUVEMENT DE LA CHALEUR

## DANS LES CORPS SOLIDES.

La première Partie de ce Mémoire a paru en 1824 dans le Tome IV des *Mémoires* de l'Académie des Sciences (pour les années 1819 et 1820).

Nous avons indiqué dans l'Avant-Propos du Tome I les raisons pour lesquelles il nous paraît inutile de le reproduire ici. Voici d'ailleurs les titres des principales divisions :

I. Exposition.

II. Notions générales et définitions préliminaires.

III. Équations du mouvement de la chaleur.

IV. De la propagation de la chaleur dans une lame rectangulaire dont les températures sont constantes.

V. Du mouvement linéaire et varié de la chaleur dans une armille.

VI. De la communication de la chaleur entre les masses disjointes.

VII. Du mouvement varié de la chaleur dans une sphère solide.

VIII. Du mouvement varié de la chaleur dans un cylindre solide.

IX. De la propagation de la chaleur dans un prisme dont l'extrémité est assujettie à une température constante.

X. Du mouvement varié de la chaleur dans un solide de forme cubique.

XI. Du mouvement linéaire et varié de la chaleur dans les corps dont une dimension est infinie.

G. D.

# THÉORIE

DU

# MOUVEMENT DE LA CHALEUR

## DANS LES CORPS SOLIDES.

*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France,* années 1821 et 1822, t. V, p. 153 à 246; 1826. Imprimerie Royale.

## XII.

*Des températures terrestres, et du mouvement de la chaleur dans l'intérieur d'une sphère solide, dont la surface est assujettie à des changements périodiques de températures.*

### 80.

Après avoir exposé les lois générales du mouvement de la chaleur dans les corps solides, il ne sera point inutile d'indiquer une des principales applications de cette théorie. On a choisi pour cet objet la question des températures terrestres. Aucune branche de l'étude de la nature ne nous intéresse davantage, et ne peut nous offrir un sujet plus digne de nos recherches. A la vérité, l'examen de cette grande question exigerait des observations exactes et multipliées, qui n'ont point encore été faites; mais on peut maintenant déterminer par le calcul les lois de la propagation de la chaleur dans le globe terrestre, et ramener à une théorie commune les observations qui ont été recueillies jusqu'ici.

Les différents points de la surface de la Terre sont inégalement exposés à l'action des rayons solaires. Les mouvements que cette planète accomplit sur elle-même et dans son orbite rendent très variables les effets successifs de la chaleur du Soleil. Si l'on plaçait des thermomètres dans les différents points de la partie solide du globe, immédiatement au-dessous de la surface, on remarquerait des changements continuels dans chacun de ces instruments. Ces mouvements de la chaleur à la surface ont des relations nécessaires avec tous ceux qu'elle éprouve dans l'intérieur du globe. On se propose ici d'exprimer ces relations par l'Analyse.

Les grandes variations de la température à la surface du globe sont périodiques : elles se reproduisent et redeviennent sensiblement les mêmes après l'intervalle d'une année. Ainsi la question consiste principalement à déterminer le mouvement de la chaleur dans un globe solide, d'un diamètre immense, dont la surface est assujettie à l'action périodique d'un foyer extérieur. On fait ici abstraction des causes propres qui pourraient faire varier la chaleur dans l'intérieur même de la Terre; car elles n'ont qu'une influence extrêmement bornée sur le système général des températures. Au reste, il convient d'étudier séparément toutes les causes qui concourent aux températures terrestres, et de soumettre d'abord à une analyse rigoureuse les effets des causes principales. En comparant ensuite les résultats du calcul et ceux de l'observation, on distinguera les effets accidentels, et l'on parviendra à déterminer les lois constantes des grands mouvements que les variations de température occasionnent dans les mers et dans l'atmosphère.

Si l'on suppose que tous les points de la surface d'un globe solide immense soient assujettis, par une cause extérieure quelconque et pendant un temps infini, à des changements périodiques de température pareils à ceux que nous observons, ces variations ne pourront affecter qu'une enveloppe sphérique dont l'épaisseur est infiniment petite par rapport au rayon; c'est-à-dire qu'à une profondeur verticale peu considérable la température d'un point aura une valeur constante qui dépend, suivant une certaine loi, de toutes les températures variables du point de la même verticale situé à la surface. Ce résultat important est donné par les observations, et l'on verra aussi qu'il est facile de le déduire de la théorie. Mais il faut remarquer que la valeur fixe de la température n'est point la même lorsqu'on change de verticale, parce qu'on suppose que les points correspondants de la surface éprouvent inégalement l'action du foyer extérieur. Si donc on fait abstraction de l'enveloppe du globe solide, on pourra dire que les divers points de sa surface sont assujettis à des températures constantes pour chacun de ces points, mais inégales pour des points différents. La question consistera maintenant à connaître quel doit être l'état intérieur résultant de l'état donné de la surface. Il faudra représenter par des formules générales le mouvement constant de la chaleur dans l'intérieur de la sphère, et déterminer la température fixe d'un point désigné. On voit, par cet exposé, que nous avons ici deux questions à traiter : dans la première, on considère les oscillations périodiques de la chaleur, dans l'enveloppe de la sphère, à des profondeurs accessibles; et dans la seconde, qui n'intéresse, pour ainsi dire, que la théorie, il s'agit de déterminer les températures fixes et inégales de la partie inférieure du solide qui ne participe point aux perturbations observées à la surface.

81.

On supposera donc, en premier lieu, que la surface d'une sphère solide, d'un très grand diamètre, est assujettie en ses divers points à des changements périodiques de température, analogues à ceux que l'on remarque vers la surface de la Terre; et l'on déterminera quel est l'effet de ces variations à une profondeur peu considérable.

Il faut d'abord considérer que l'on doit ici faire abstraction du mouvement de la chaleur dans le sens horizontal. En effet, tous les points de la surface qui sont contigus, et compris dans une assez grande étendue, doivent être regardés comme également affectés par les causes extérieures : il en résulte que les points correspondants placés dans l'intérieur à une profondeur peu considérable ont aussi, dans le même instant, des températures sensiblement égales; donc ils se communiquent des quantités de chaleur extrêmement petites. Il n'en est pas de même des points contigus d'une même ligne verticale; leurs températures, prises dans un même instant, diffèrent entre elles de quantités incomparablement plus grandes que celles des points également distants de la surface. Par conséquent, le mouvement de la chaleur qu'il s'agit de connaitre, pour une ligne verticale donnée, est sensiblement le même que si tous les points de la surface de la sphère subissaient des changements périodiques entièrement semblables. Il reste donc à considérer le mouvement de la chaleur dans cette dernière hypothèse. Les points également distants du centre de la sphère conservent alors une température commune $v$ qui varie avec le temps écoulé $t$. En désignant par $x$ la distance au centre, on voit que $v$ est une fonction de $x$ et $t$ qu'il faut déterminer. L'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

que l'on a obtenue précédemment (art. 11) ([1]), représente les variations instantanées des températures dans une sphère solide dont les couches sphériques sont inégalement échauffées; c'est-à-dire que, si l'on donnait actuellement aux points de la sphère placés à la distance $x$ une température $v$, $v$ étant une fonction de $x$ donnée, et que l'on voulût connaître le résultat instantané de l'action mutuelle de toutes les particules, il faudrait ajouter à la température de chaque point la différentielle

$$\frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dt.$$

On voit par là que cette équation, que l'on avait trouvée pour le cas où le solide se refroidit librement après son immersion dans un liquide, exprime aussi la condition générale à laquelle la fonction $v$ doit satisfaire, dans la question que l'on traite maintenant. On remplacera la variable $x$ par $X - u$, X désignant le rayon total de la sphère, et $u$ la

([1]) *Théorie de la chaleur*, art. 113, p. 92. G. D.

distance perpendiculaire entre la surface et le point dont la température est $v$. On obtient par cette substitution, et en considérant X comme un très grand nombre,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{CD}} \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}.$$

On aurait pu parvenir à ce même résultat en considérant immédiatement le mouvement linéaire de la chaleur dans un solide terminé par un plan infini; mais il y a, dans la question des températures terrestres, divers points que l'on ne peut éclaircir qu'en employant l'équation plus générale qui convient à la sphère.

Il faut ajouter aux remarques précédentes que l'on peut encore faire abstraction de l'état primitif dans lequel se trouvait le solide lorsqu'on a commencé à assujettir la surface aux variations périodiques de température. En effet, cet état initial a été continuellement changé, et pendant un temps infini, en sorte qu'il s'est transformé progressivement en un autre état, qui ne dépend plus que des températures variables de la surface, et qui est lui-même périodique. La différence entre cet état final et celui qui avait eu lieu au commencement a diminué de plus en plus, et a disparu d'elle-même entièrement; elle résultait d'une chaleur excédante qui s'est dissipée librement dans l'espace extérieur ou dans le solide infini. Au reste, ce même résultat, qu'il est facile d'apercevoir *a priori*, se déduit aussi du calcul. Il est exprimé par les formules générales que l'on obtient en ayant égard à l'état initial; et l'on reconnaît facilement que les températures finales du solide sont périodiques, et redeviennent les mêmes après un intervalle de temps égal à celui qui détermine le retour des températures de la surface. Il a paru superflu d'entrer ici dans ce développement.

On voit maintenant que la fonction cherchée $v$ de $x$ et $t$ est périodique par rapport au temps $t$, et qu'elle satisfait à l'équation générale

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{CD}} \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = k \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}. \tag{e}$$

Elle satisfait aussi, lorsqu'on fait $u = 0$, à l'équation déterminée

$$v = \varphi(t),$$

$\varphi$ étant une fonction périodique que l'on suppose connue. C'est au moyen de ces conditions qu'il faut déterminer la fonction $v$.

La nature de la fonction $\varphi$ est telle, par hypothèse, qu'elle ne change point de valeur si l'on écrit $t + \theta$ au lieu de $t$, $\theta$ étant la durée de la période; il doit en être de même de la fonction $v$.

On satisfait à l'équation (e) en supposant

$$v = ae^{-gu}\cos(2g^2kt - gu),$$

ou

$$v = ae^{-gu}\sin(2g^2kt - gu).$$

Ces valeurs particulières se déduisent de celles que nous avons employées jusqu'ici; il suffit de rendre les exposants imaginaires. Les quantités $g$ et $a$ sont arbitraires. On peut donc exprimer la valeur générale de $v$ par l'équation suivante :

$$(e)\quad \left\{\begin{aligned} v = &+ e^{-gu}\,[a\cos(2g^2kt - gu) + b\sin(2g^2kt - gu)]\\ &+ e^{-g_1u}[a_1\cos(2g_1^2kt - g_1u) + b_1\sin(2g_1^2kt - g_1u)]\\ &+ e^{-g_2u}[a_2\cos(2g_2^2kt - g_2u) + b_2\sin(2g_2^2kt - g_2u)]\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

En supposant $u = 0$, on aura l'équation de condition

$$\begin{aligned}\varphi(t) = &+ a\cos 2g^2kt + b\sin 2g^2kt\\ &+ a_1\cos 2g_1^2kt + b_1\sin 2g_1^2kt\\ &+ a_2\cos 2g_2^2kt + b_2\sin 2g_2^2kt\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit périodique et qu'elle reprenne sa valeur lorsqu'on augmente $t$ de l'intervalle $\theta$, il suffit que

$$2g^2k\theta = 2i\pi,$$

$i$ étant un nombre entier quelconque. Si l'on prend pour $g$, $g_1$, $g_2$, ... des nombres qui satisfassent à cette condition, la valeur générale de $v$

donnée par l'équation ($e$) sera périodique aussi, et ne changera point lorsqu'on écrira $t+\theta$ au lieu de $t$; car cette substitution ne fera qu'augmenter d'un multiple de la circonférence entière toutes les quantités qui sont sous les signes sinus ou cosinus.

On a donc

$$\begin{aligned}\varphi(t) = a &+ a_1 \cos\left(1\frac{2\pi}{\theta}t\right) + b_1 \sin\left(1\frac{2\pi}{\theta}t\right)\\ &+ a_2 \cos\left(2\frac{2\pi}{\theta}t\right) + b_2 \sin\left(2\frac{2\pi}{\theta}t\right)\\ &+ a_3 \cos\left(3\frac{2\pi}{\theta}t\right) + b_3 \sin\left(3\frac{2\pi}{\theta}t\right)\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

La fonction $\varphi(t)$ étant supposée connue, il sera facile d'en déduire les valeurs des coefficients $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots; b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$. On trouvera (art. 31) (¹)

$$\begin{aligned}\pi a &= \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\theta}\int \varphi(t)\,dt,\\ \pi a_1 &= \frac{2\pi}{\theta}\int \varphi(t)\cos\left(\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt,\\ \pi b_1 &= \frac{2\pi}{\theta}\int \varphi(t)\sin\left(\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt;\end{aligned}$$

et en général

$$\begin{aligned}\pi a_i &= \frac{2\pi}{\theta}\int \varphi(t)\cos\left(i\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt,\\ \pi b_i &= \frac{2\pi}{\theta}\int \varphi(t)\sin\left(i\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt.\end{aligned}$$

Les intégrales doivent être prises depuis $\frac{2\pi}{\theta}t = 0$ jusqu'à $\frac{2\pi}{\theta}t = 2\pi$, ou depuis $t=0$ jusqu'à $t=\theta$. Les coefficients étant ainsi déterminés, et les exposants $g, g_1, g_2, g_3, \ldots, g_i, \ldots$ étant $0$, $\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}$, $\sqrt{\frac{2\pi}{k\theta}}$,

(¹) *Théorie de la chaleur*, art. 241, p. 244. G. D.

$\sqrt{\frac{3\pi}{k\theta}}, \ldots, \sqrt{i\frac{\pi}{k\theta}}, \ldots,$ il ne reste rien d'inconnu dans la valeur de $v$. L'équation suivante fournit donc la solution complète de la question :

$$(\mathrm{E}) \left\{ \begin{aligned} v = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \varphi(t)\,dt &+ \frac{2}{\theta} e^{-u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}} \left\{ \begin{aligned} &\cos\left(\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}\right)\int_0^\theta \varphi(t)\cos\left(\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt \\ &\sin\left(\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}\right)\int_0^\theta \varphi(t)\sin\left(\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt \end{aligned}\right\} \\ &+ \frac{2}{\theta} e^{-u\sqrt{\frac{2\pi}{k\theta}}} \left\{ \begin{aligned} &\cos\left(2\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{2\frac{\pi}{k\theta}}\right)\int_0^\theta \varphi(t)\cos\left(2\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt \\ &\sin\left(2\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{2\frac{\pi}{k\theta}}\right)\int_0^\theta \varphi(t)\sin\left(2\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt \end{aligned}\right\} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{2}{\theta} e^{-u\sqrt{\frac{i\pi}{k\theta}}} \left\{ \begin{aligned} &\cos\left(i\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{i\frac{\pi}{k\theta}}\right)\int_0^\theta \varphi(t)\cos\left(i\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt \\ &\sin\left(i\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{i\frac{\pi}{k\theta}}\right)\int_0^\theta \varphi(t)\sin\left(i\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt \end{aligned}\right\} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

82.

Cette solution fournit diverses conséquences remarquables. Les quantités exponentielles

$$e^{-u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}}, \quad e^{-u\sqrt{2\frac{\pi}{k\theta}}}, \quad e^{-u\sqrt{3\frac{\pi}{k\theta}}}, \quad \ldots$$

forment une suite décroissante, et la diminution est d'autant plus rapide que la quantité $u$ est plus grande. Il en résulte que la température des points du solide placés à une profondeur un peu considérable est représentée sensiblement par les deux premiers termes de la valeur de $v$. En effet, il faut remarquer que les quantités variables qui multiplient les exponentielles sont toutes affectées des signes cosinus ou sinus; elles ne peuvent donc acquérir, lorsqu'on fait varier $t$ ou $u$, que des valeurs comprises entre 1 et $-1$. A l'égard des coefficients qui contiennent le signe intégral, ils sont tous constants; donc les