TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

Pages
AVANT-PROPOS DES ŒUVRES DE FOURIER V

THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR [1].

DISCOURS PRÉLIMINAIRE XV

CHAPITRE I.

INTRODUCTION.

SECTION I.

EXPOSITION DE L'OBJET DE CET OUVRAGE.

Articles

1. Objet des recherches théoriques 1

2-10. Exemples divers, armille, cube, sphère, prisme infini; la température variable d'un point quelconque est une fonction des coordonnées de ce point et du temps. — La quantité de chaleur qui, pendant l'unité de temps, traverse une surface donnée dans l'intérieur du solide est aussi une fonction du temps écoulé et des quantités qui déterminent la forme et la position de la surface. — La théorie a pour objet de découvrir ces fonctions 2

11. Les trois quantités spécifiques qu'il est nécessaire d'observer sont la *capacité*, la conducibilité propre ou *perméabilité*, et la conducibilité extérieure ou *pénétrabilité*. Les coefficients qui les expriment peuvent d'abord être regardés comme des nombres constants, indépendants des températures.... 6

12. Premier exposé de la question des températures terrestres 8

[1] Chaque paragraphe de cette Table indique la matière traitée dans les articles qui sont écrits à gauche de ce paragraphe. Le premier de ces articles commence à la page marquée à droite.

Articles — Pages

13-15. Conditions nécessaires aux applications de la théorie, objet des expériences... 9

16-21. Les rayons de chaleur qui sortent d'un même point d'une surface n'ont point la même intensité. L'intensité de chaque rayon est proportionnelle au cosinus de l'angle que sa direction fait avec la normale à la surface. Remarques diverses et considérations sur l'objet et l'étendue des questions thermologiques et sur les rapports de l'analyse générale avec l'étude de la nature 10

SECTION II.

NOTIONS GÉNÉRALES ET DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

22-24. Température permanente, thermomètre. La température désignée par 0 est celle de la glace fondante. Nous désignons par 1 celle de l'ébullition de l'eau dans un vase donné, sous une pression donnée.......... 15

25. L'unité qui sert à mesurer les quantités de chaleur est la chaleur nécessaire pour résoudre en eau liquide une certaine masse d'eau glacée.......... 16

26. Capacité spécifique de chaleur.......... 17

27-29. Températures, mesurées par les accroissements de volume ou par les quantités de chaleur ajoutées. — On ne considère ici que les cas où les augmentations de volume sont proportionnelles aux augmentations de la quantité de chaleur. Cette condition n'a point lieu dans les liquides, en général; elle est sensiblement vraie pour les corps solides dont les températures diffèrent beaucoup de celles qui causent le changement d'état.......... 17

30. Notion de la conducibilité extérieure.......... 18

31. On peut regarder d'abord la quantité de chaleur perdue comme proportionnelle à la température. Cette proposition n'est sensiblement vraie que pour certaines limites de température.......... 19

32-35. La chaleur perdue dans le milieu est formée de plusieurs parties. Cet effet est composé et variable. Chaleur lumineuse.......... 19

36. Mesure de la conducibilité extérieure.......... 21

37. Notion de la conducibilité propre; on observe aussi cette propriété dans les liquides.......... 21

38-39. Équilibre des températures. Cet effet est indépendant du contact.......... 22

40-49. Premières notions de la chaleur rayonnante et de l'équilibre qui s'établit dans les espaces vides d'air, de la cause qui réfléchit les rayons de la chaleur ou qui les contient dans les corps, du mode de communication entre les molécules intérieures, de la loi qui règle l'intensité des rayons émis. Cette loi n'est point troublée par la réflexion de la chaleur.......... 23

50-51. Première notion des effets de la chaleur réfléchie.......... 28

52-56. Remarques sur les propriétés statiques ou dynamiques de la chaleur. Elle est le principe de toute élasticité, et la force élastique des fluides aériformes indique exactement les températures.......... 31

SECTION III.

PRINCIPE DE LA COMMUNICATION DE LA CHALEUR.

Articles | Pages

57-59. Lorsque deux molécules d'un même solide sont extrêmement voisines et ont des températures inégales, la molécule plus échauffée communique à celle qui l'est moins une quantité de chaleur exactement exprimée par le produit formé de la durée de l'instant, de la différence extrêmement petite des températures, et d'une certaine fonction de la distance des molécules........ 33

60. Lorsqu'un corps échauffé est placé dans un milieu aériforme d'une température moins élevée, il perd à chaque instant une quantité de chaleur que l'on peut regarder, dans les premières recherches, comme proportionnelle à l'excès de la température de la surface sur la température du milieu.... 35

61-64. Les propositions énoncées dans les deux articles précédents sont fondées sur diverses observations. Le premier objet de la théorie est de découvrir toutes les conséquences exactes de ces propositions. On peut ensuite mesurer les variations des coefficients, en comparant les résultats du calcul avec des expériences très précises... 36

SECTION IV.

DU MOUVEMENT UNIFORME ET LINÉAIRE DE LA CHALEUR.

65. Les températures permanentes d'un solide infini compris entre deux bases parallèles retenues à des températures fixes sont exprimées par l'équation

$$v - a = \frac{b - a}{e} z;$$

a et b sont les températures des deux plans extrêmes, e leur distance, et v la température de la section dont la distance au plan inférieur est z...... 38

66-67. Notion et mesure du flux de chaleur...................................... 41

68-69. Mesure de la conducibilité propre.................................... 45

70. Remarques sur les cas où l'action directe de la chaleur se porterait à une distance sensible.. 46

71. État du même solide, lorsque le plan supérieur est exposé à l'air........... 47

72. Conditions générales du mouvement linéaire de la chaleur................. 49

SECTION V.

LOI DES TEMPÉRATURES PERMANENTES DANS UN PRISME D'UNE PETITE ÉPAISSEUR.

73-80. Équation du mouvement linéaire de la chaleur dans le prisme. Conséquences diverses de cette équation... 51

SECTION VI.

DE L'ÉCHAUFFEMENT DES ESPACES CLOS.

81-84. L'état final de l'enceinte solide qui termine l'espace échauffé par une surface σ,

Articles | Pages

maintenue à la température α, est exprimée par l'équation suivante :

$$m - n = (\alpha - n)\frac{P}{1+P}.$$

La valeur de P est $\frac{\sigma}{s}\left(\frac{g}{h} + \frac{ge}{K} + \frac{g}{H}\right)$; m est la température de l'air intérieur, n la température de l'air extérieur; g, h, H mesurent respectivement la pénétrabilité de la surface échauffée σ, celle de la surface intérieure de l'enceinte s et celle de la surface extérieure s; e est l'épaisseur de l'enceinte et K sa conducibilité propre 57

85-86. Conséquences remarquables de l'équation précédente 61

87-91. Mesure de la quantité de chaleur nécessaire pour retenir à une température constante un corps dont la surface est séparée de l'air extérieur par plusieurs enceintes successives. Effets remarquables de la séparation des surfaces. Ces conséquences s'appliquent à des questions très variées............. 63

SECTION VII.

DU MOUVEMENT UNIFORME DE LA CHALEUR SUIVANT LES TROIS DIMENSIONS.

92-93. Les températures permanentes d'un solide compris entre six plans rectangulaires sont exprimées par l'équation

$$v = A + ax + by + cz;$$

x, y, z sont les coordonnées d'un point quelconque, dont v est la température; A, a, b, c sont des nombres constants. Si les plans extrêmes sont retenus par des causes quelconques à des températures fixes qui satisfont à l'équation précédente, le système final de toutes les températures intérieures sera exprimé par la même équation 70

94-95. Mesure du flux de chaleur dans ce prisme.............................. 73

SECTION VIII.

MESURE DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR EN UN POINT DONNÉ D'UNE MASSE SOLIDE.

96-99. On suppose que le système variable des températures d'un solide est exprimé par l'équation

$$v = F(x, y, z, t),$$

où v désigne la température que l'on observerait, après le temps écoulé t, au point dont les coordonnées sont x, y, z, et l'on forme l'expression analytique du flux de chaleur dans l'intérieur du solide, suivant une direction donnée 76

100. Application du théorème précédent au cas où la fonction F est

$e^{-gt}\cos x \cos y \cos z$ 81

CHAPITRE II.

ÉQUATION DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR.

SECTION I.

ÉQUATION DU MOUVEMENT VARIÉ DE LA CHALEUR DANS UNE ARMILLE.

Articles | Pages

101-105. Le mouvement variable de la chaleur dans l'armille est exprimé par l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{hl}{CDS}v.$$

L'arc x mesure la distance d'une tranche à l'origine o; v est la température que cette tranche acquiert après le temps écoulé t; K, C, D, h sont des coefficients spécifiques; S est la surface de la section dont la révolution engendre l'anneau; l est le contour de cette section.............. 84

106-110. Les températures des points placés à égales distances sont représentées par les termes d'une série récurrente. L'observation des températures v_1, v_2, v_3 de trois points consécutifs donne la mesure du rapport $\frac{h}{K}$: on a

$$\frac{v_1+v_3}{v_2} = q, \qquad \omega^2 - q\omega + 1 = 0$$

et

$$\frac{h}{K} = \frac{S}{l}\left(\frac{\log\omega}{\lambda \log e}\right)^2.$$

La distance de deux points consécutifs est λ, et $\log\omega$ est le logarithme décimal d'une des deux valeurs de ω............................... 87

SECTION II.

ÉQUATION DU MOUVEMENT VARIÉ DE LA CHALEUR DANS UNE SPHÈRE SOLIDE.

111-113. x désignant le rayon d'une couche quelconque, le mouvement de la chaleur dans la sphère est exprimé par l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)........................ 90$$

114-117. Conditions relatives à l'état de la surface et à l'état initial du solide....... 92

SECTION III.

ÉQUATION DU MOUVEMENT VARIÉ DE LA CHALEUR DANS UN CYLINDRE SOLIDE.

118-120. Les températures de ce solide sont déterminées par trois équations : l'une se rapporte aux températures intérieures; la seconde exprime l'état continuel de la surface; la troisième exprime l'état initial du solide........ 95

SECTION IV.

ÉQUATION DU MOUVEMENT UNIFORME DE LA CHALEUR DANS UN PRISME SOLIDE D'UNE LONGUEUR INFINIE.

Articles | Pages

121-123. Le système des températures fixes satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0;$$

v est la température d'un point dont les coordonnées sont x, y, z 98

124-125. Équation relative à l'état de la surface et à celui de la première tranche... 101

SECTION V.

ÉQUATION DU MOUVEMENT VARIÉ DE LA CHALEUR DANS UN CUBE SOLIDE.

126-131. Le système des températures variables est déterminé par trois équations : l'une exprime l'état intérieur; la seconde se rapporte à l'état de la surface, et la troisième exprime l'état initial 103

SECTION VI.

ÉQUATION GÉNÉRALE DE LA PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS L'INTÉRIEUR DES SOLIDES.

132-139. Démonstration élémentaire des propriétés du mouvement uniforme de la chaleur dans un solide compris entre six plans rectangulaires, les températures constantes étant exprimées par l'équation linéaire

$$v = \mathrm{A} - ax - by - cz$$

Les températures ne peuvent changer, parce que chaque point du solide reçoit autant de chaleur qu'il en donne. La quantité de chaleur qui traverse, durant l'unité de temps, un plan perpendiculaire à l'axe des z est la même en quelque point de cet axe que passe le plan. — La valeur de ce flux commun est celle qui aurait lieu si les coefficients a et b étaient nuls 107

140-141. Expression analytique du flux dans l'intérieur d'un solide quelconque. L'équation des températures étant

$$v = f(x, y, z, t),$$

la fonction $-\mathrm{K}\omega\frac{\partial v}{\partial z}dt$ exprime la quantité de chaleur qui traverse, pendant l'instant dt, une aire infiniment petite ω perpendiculaire à l'axe des z, au point dont les coordonnées sont x, y, z et dont la température est v après le temps écoulé t 114

Articles Pages

142-145. Il est facile de déduire du théorème précédent l'équation générale du mouvement de la chaleur, qui est

(AE) $$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$ 118

SECTION VII.

ÉQUATION GÉNÉRALE RELATIVE A LA SURFACE.

146-154. On démontre que les températures variables des points de la surface d'un corps qui se refroidit dans l'air satisfont à cette équation

$$m\frac{\partial v}{\partial x} + n\frac{\partial v}{\partial y} + p\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{h}{K}vq = 0,$$

$m\,dx + n\,dy + p\,dz = 0$ étant l'équation différentielle de la surface qui termine le solide, et q étant égale à $(m^2+n^2+p^2)^{\frac{1}{2}}$. Pour découvrir cette équation, on considère une molécule de l'enveloppe qui termine le solide, et l'on exprime que la température de cet élément ne change point d'une grandeur finie pendant un instant infiniment petit. Cette condition a lieu et continue de subsister après que l'action régulière du milieu s'est exercée pendant un instant très petit. — On peut donner à l'élément de l'enveloppe une forme quelconque. Le cas où cette molécule est formée par des sections rectangulaires offre des propriétés remarquables. Dans le cas le plus simple, qui est celui où la base est parallèle au plan tangent, la vérité de l'équation est évidente 122

SECTION VIII.

APPLICATION DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES.

155-156. En appliquant l'équation générale (E) au cas du cylindre et de la sphère, on trouve les mêmes équations que celles de la Section III et de la Section II de ce Chapitre 133

SECTION IX.

REMARQUES GÉNÉRALES.

157-162. Considérations fondamentales sur la nature des quantités x, t, v, K, h, C, D qui entrent dans toutes les expressions analytiques de la théorie de la chaleur. Chacune de ces quantités a un exposant de dimension qui se rapporte, ou à la longueur, ou à la durée, ou à la température; on trouve ces exposants en faisant varier les unités de mesure 135

CHAPITRE III.

PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS UN SOLIDE RECTANGULAIRE INFINI.

SECTION I.

EXPOSITION DE LA QUESTION.

Articles Pages

163-166. Les températures constantes d'une lame rectangulaire, comprise entre deux arêtes parallèles infinies retenues à la température zéro, sont exprimées par l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \ldots\ldots$$ 141

167-170. On considère l'état de cette lame à une distance extrêmement grande de l'arête transversale; le rapport des températures de deux points, dont x_1, y et x_2, y sont les coordonnées, change à mesure que la valeur de y augmente, x_1 et x_2 conservant leurs valeurs respectives. Ce rapport a une limite dont il approche de plus en plus et, lorsque y est infinie, il est exprimé par le produit d'une fonction de x et d'une fonction de y. Cette remarque suffit pour découvrir la forme générale de v, savoir :

$$v = \sum_{i=1}^{i=\infty} a_i e^{-(2i-1)x} \cos(2i-1)y.$$

Il est facile de connaître comment le mouvement de la chaleur s'accomplit dans cette lame 144

SECTION II.

PREMIER EXEMPLE DE L'USAGE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DANS LA THÉORIE DE LA CHALEUR.

171-178. Recherche des coefficients dans l'équation

$$1 = a \cos y + b \cos 3y + c \cos 5y + d \cos 7y + \ldots.$$

On en conclut

$$a_i = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}$$

ou

$$\frac{\pi}{4} = \cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \frac{1}{5}\cos 5y - \frac{1}{7}\cos 7y + \ldots\ldots$$ 149

SECTION III.

REMARQUES SUR CES SÉRIES.

179-181. Pour trouver la valeur de la série qui forme le second membre, on suppose que le nombre m des termes est limité, et la série devient une fonction

Articles Pages

de x et m. On développe cette fonction selon les puissances réciproques de m, et l'on fait m infini 158

182-184. On applique le même procédé à plusieurs autres séries 161

185-188. Dans le développement précédent, qui donne la valeur de la fonction de x et de m, on détermine rigoureusement les limites dans lesquelles est comprise la somme de tous les termes, à partir d'un terme donné 165

189. Procédé très simple pour former la série

$$\frac{\pi}{4} = -\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i}{2i-1}\cos(2i-1)x \ldots\ldots \quad 169$$

SECTION IV.

SOLUTION GÉNÉRALE.

190-191. Expression analytique du mouvement de la chaleur dans la table rectangulaire; il se décompose en mouvements simples 170

192-195. Mesure de la quantité de chaleur qui traverse une arête parallèle ou perpendiculaire à la base. Cette expression du flux suffirait pour vérifier la solution 172

196-199. Conséquences de cette solution. La table rectangulaire doit être considérée comme faisant partie d'un plan infini; la solution exprime les températures permanentes de tous les points de ce plan 176

200-204. On démontre que la question proposée n'admet aucune solution différente de celle que l'on vient de rapporter 178

SECTION V.

EXPRESSION FINIE DU RÉSULTAT DE LA SOLUTION.

205-206. La température d'un point de la table rectangulaire, dont x et y sont les coordonnées, est ainsi exprimée

$$\frac{\pi}{2}v = \text{arc tang}\,\frac{2\cos y}{e^x - e^{-x}} \ldots\ldots \quad 184$$

SECTION VI.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION ARBITRAIRE EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

207-214. On obtient ce développement en déterminant les valeurs des coefficients inconnus dans les équations suivantes, dont le nombre est infini,

$$\begin{aligned} A &= a + 2\,b + 3\,c + 4\,d + \ldots, \\ B &= a + 2^3 b + 3^3 c + 4^3 d + \ldots, \\ C &= a + 2^5 b + 3^5 c + 4^5 d + \ldots, \\ D &= a + 2^7 b + 3^7 c + 4^7 d + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Pour résoudre ces équations, on suppose d'abord que le nombre des

Articles Pages

équations est m, et qu'il y a seulement un nombre m d'inconnues a, b, c, d, ..., en omettant tous les termes subséquents. On détermine les inconnues pour une certaine valeur du nombre m; ensuite on augmente successivement cette valeur de m, et l'on cherche la limite dont s'approchent continuellement les valeurs des coefficients; ces limites sont les quantités qu'il s'agit de déterminer. — Expression des valeurs de a, b, c, d, e, ... lorsque m est infini 187

215-216. On développe sous la forme

$$a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x + d \sin 4x + \dots$$

la fonction $\varphi(x)$, que l'on suppose d'abord ne contenir que des puissances impaires de x 201

217-218. Expression différente de ce même développement. Application à la fonction $e^x - e^{-x}$ 204

219-221. La fonction quelconque $\varphi(x)$ peut être développée sous cette forme :

$$a \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots + a_i \sin ix + \dots.$$

La valeur du coefficient général a_i est $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x) \sin ix\, dx$. On en conclut ce théorème très simple :

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x) = \sin x \int_0^\pi \varphi(\alpha) \sin\alpha\, d\alpha + \sin 2x \int_0^\pi \varphi(\alpha) \sin 3\alpha\, d\alpha + \sin 3x \int_0^\pi \varphi(\alpha) \sin i\alpha\, d\alpha + \dots$$

ou

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin ix \int_0^\pi \varphi(\alpha) \sin i\alpha\, d\alpha. \dots\dots$$ 207

222-223. Application de ce théorème; on en déduit cette série remarquable :

$$\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{2}{1.3}\sin 2x + \frac{4}{3.5}\sin 4x + \frac{6}{5.7}\sin 6x + \dots\dots$$ 212

224-226. Second théorème sur le développement des fonctions en séries trigonométriques :

$$\pi\,\psi(x) = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} \cos ix \int_0^\pi \psi(\alpha) \cos i\alpha\, d\alpha.$$

Applications; on en conclut cette série remarquable :

$$\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{1.3} - \frac{\cos 4x}{3.5} - \frac{\cos 6x}{5.7} - \dots\dots$$ 215

226-230. Les théorèmes précédents s'appliquent aux fonctions discontinues et résolvent les questions qui se sont élevées sur l'analyse de Daniel Bernoulli

Articles Pages

dans le problème des cordes vibrantes. — La valeur de la série

$$\sin x \sin \mathrm{V}\alpha + \frac{1}{2}\sin 2x \sin \mathrm{V}\,2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3x \sin \mathrm{V}\,3\alpha + \ldots$$

est $\frac{\pi}{2}$, si l'on choisit pour x une quantité plus grande que o et moindre que α; et la valeur de la série est o, si x est une quantité quelconque comprise entre α et $\frac{\pi}{2}$. Application à d'autres exemples remarquables : lignes courbes ou surfaces qui se confondent dans une partie de leur cours, et diffèrent dans toutes les autres parties.................... 218

231–233. Une fonction quelconque $\mathrm{F}(x)$ peut être développée sous cette forme :

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{A} + \begin{cases} a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \cos 4x + \ldots \\ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + \ldots . \end{cases}$$

Chacun des coefficients est une intégrale définie. On a en général

$$2\pi \mathrm{A} = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{F}(x)\,dx, \qquad \pi a_i = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{F}(x)\cos ix\,dx, \qquad \pi b_i = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{F}(x)\sin ix\,dx.$$

On forme ainsi ce théorème général, qui est un des éléments principaux de notre analyse :

$$2\pi\,\mathrm{F}(x) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\left(\cos ix \int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{F}(\alpha)\cos i\alpha\,d\alpha + \sin ix \int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{F}(\alpha)\sin i\alpha\,d\alpha\right)$$

ou

$$2\pi\,\mathrm{F}(x) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{F}(\alpha)\cos i(x-\alpha)\,d\alpha. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 224$$

234. On doit regarder comme entièrement arbitraires les valeurs de $\mathrm{F}(x)$ qui répondent aux valeurs de x comprises entre $-\pi$ et $+\pi$. On peut aussi choisir pour x des limites quelconques.............................. 230

235. Remarques diverses sur l'usage des développements en séries trigonométriques.. 231

SECTION VII.

APPLICATION A LA QUESTION ACTUELLE.

236–237. Expression des températures permanentes dans la table rectangulaire infinie, l'état de l'arête transversale étant représenté par une fonction arbitraire. 235

Cambridge University Press
978-1-108-05938-1 - Oeuvres de Fourier: Volume 1
Edited by Jean Gaston Darboux
Table of Contents
More information

CHAPITRE IV.

DU MOUVEMENT LINÉAIRE ET VARIÉ DE LA CHALEUR DANS UNE ARMILLE.

SECTION I.

SOLUTION GÉNÉRALE DE LA QUESTION.

Articles — Pages

238-241. Le mouvement variable que l'on considère est composé de mouvements simples. Dans chacun de ces mouvements, les températures conservent leurs rapports primitifs et décroissent, avec le temps, comme les ordonnées v de la ligne dont l'équation est

$$v = Ae^{-mt}.$$

Formation de l'expression générale 239

242-244. Application à des exemples remarquables. Conséquences diverses de la solution 244

245-246. Le système des températures converge rapidement vers un état régulier et final, exprimé par la première partie de l'intégrale. Alors la somme des températures des deux points diamétralement opposés est la même, quelle que soit la position du diamètre. Elle équivaut à la température moyenne. — Dans chaque mouvement simple, la circonférence est divisée par des nœuds équidistants. Tous ces mouvements partiels disparaissent progressivement, excepté le premier; et en général la chaleur distribuée dans le solide y affecte une disposition régulière, indépendante de l'état initial... 248

SECTION II.

DE LA COMMUNICATION DE LA CHALEUR ENTRE DES MASSES DISJOINTES.

247-250. De la communication de la chaleur entre deux masses. Expression des températures variables. Remarque sur la valeur du coefficient qui mesure la conducibilité 253

251-255. De la communication de la chaleur entre n masses disjointes rangées en ligne droite. Expression de la température variable de chaque masse; elle est donnée par une fonction du temps écoulé, du coefficient qui mesure la conducibilité, et de toutes les températures initiales regardées comme arbitraires 257

256-257. Conséquences remarquables de cette solution 265

258. Application au cas où le nombre des masses est infini 267

259-266. De la communication de la chaleur entre n masses disjointes rangées circulairement. Équations différentielles propres à la question; intégration de ces équations. La température variable de chacune des masses est

Articles Pages

exprimée en fonction du coefficient qui mesure la conducibilité, du temps qui s'est écoulé depuis l'instant où la communication a commencé, et de toutes les températures initiales, qui sont arbitraires; mais, pour connaître entièrement ces fonctions, il est nécessaire d'effectuer l'élimination des coefficients.. 268

267-271. Élimination des coefficients dans les équations qui contiennent ces inconnues et les températures initiales données.......................... 280

272-273. Formation de la solution générale; expression analytique du résultat...... 287

274-276. Application et conséquences de cette solution.......................... 289

277-278. Examen du cas où l'on suppose le nombre n infini. On obtient la solution relative à l'anneau solide, rapportée dans l'article 241, et le théorème de l'article 234. On connaît ainsi l'origine de l'analyse que nous avons employée pour résoudre les équations relatives aux corps continus........ 293

279. Expression analytique des deux résultats précédents.................... 297

280-282. On démontre que la question du mouvement de la chaleur dans l'armille n'admet aucune autre solution. Cette intégrale de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

est évidemment la plus générale que l'on puisse former.............. 299

CHAPITRE V.

DE LA PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS UNE SPHÈRE SOLIDE.

SECTION I.

SOLUTION GÉNÉRALE.

283-289. On considère en premier lieu que le rapport des températures variables des deux points du solide s'approche continuellement d'une limite déterminée. Cette remarque conduit à l'équation

$$v = A\frac{\sin nx}{x}e^{-kn^2t},$$

qui exprime le mouvement simple de la chaleur dans la sphère. Le nombre n a une infinité de valeurs données par l'équation déterminée

$$\frac{nX}{\tang nX} = 1 - hX.$$

On désigne par X le rayon de la sphère, et par x le rayon d'une sphère concentrique quelconque, dont v est la température après le temps

Articles | Pages

écoulé t; h et k sont les coefficients spécifiques; A est une constante quelconque. Constructions propres à faire connaître la nature de l'équation déterminée, les limites et les valeurs de ses racines 304

290-292. Formation de la solution générale; état final du solide 312

293. Application au cas où la sphère a été échauffée par une longue immersion. 316

SECTION II.

REMARQUES DIVERSES SUR CETTE SOLUTION.

294-297. Conséquences relatives aux sphères d'un petit rayon et aux températures finales d'une sphère quelconque 317

298-300. Température variable d'un thermomètre plongé dans un liquide qui se refroidit librement. Application de ces résultats à la comparaison et à l'usage des thermomètres 321

301. Expression de la température moyenne de la sphère en fonction du temps écoulé 326

302-304. Application aux sphères d'un très grand rayon et à celles dont le rayon est très petit 327

305. Remarques sur la nature de l'équation déterminée qui donne toutes les valeurs de n 329

CHAPITRE VI.

DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR DANS UN CYLINDRE SOLIDE.

306-307. On remarque en premier lieu que le rapport des températures variables de deux points du solide s'approche continuellement d'une limite déterminée, et l'on connaît par là l'expression du mouvement simple. La fonction de x qui est un des facteurs de cette expression est donnée par une équation différentielle du second ordre. Il entre dans cette fonction un certain nombre g, qui doit satisfaire à une équation déterminée 332

308-309. Analyse de cette équation. On démontre, au moyen des principaux théorèmes de l'Algèbre, que toutes les racines de l'équation sont réelles 335

310. La fonction u de la variable x est exprimée par

$$u = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sqrt{g}\sin r)\,dr,$$

et l'équation déterminée est

$$hu + \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

en donnant à x sa valeur totale X 339

Articles Pages

311-312. Le développement de la fonction $\varphi(z)$ étant représenté par

$$a + bz + c\frac{z^2}{2} + d\frac{z^3}{2.3} + e\frac{z^4}{2.3.4} + \ldots,$$

la valeur de la série

$$a + \frac{ct^2}{2^2} + \frac{et^4}{2^2.4^2} + \ldots$$

est

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t\sin u)\,du.$$

Remarque sur cet usage des intégrales définies 342

313. Expression de la fonction u de la variable x en fraction continue 345

314. Formation de la solution générale 346

315-318. Exposition de l'analyse qui détermine les valeurs des coefficients......... 348

319. Solution générale 355

320. Conséquences de cette solution 356

CHAPITRE VII.

PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS UN PRISME RECTANGULAIRE.

321-323. Expression du mouvement simple déterminé par les propriétés générales de la chaleur et par la figure du solide. Il entre dans cette expression un arc ε qui satisfait à une équation transcendante dont toutes les racines sont réelles.. 359

324. On détermine tous les coefficients inconnus par des intégrales définies 362

325. Solution générale de la question.................................... 364

326-327. La question proposée n'admet aucune autre solution.................... 365

328-329. Température des points de l'axe du prisme............................ 367

330. Application au cas où l'épaisseur du prisme est très petite............... 369

331-332. La solution fait connaître comment s'établit le mouvement uniforme de la chaleur dans l'intérieur du solide 370

332 *bis*. Application à des prismes dont la base a de grandes dimensions 373

CHAPITRE VIII.

DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR DANS UN CUBE SOLIDE.

Articles		Pages
333-334.	Expression du mouvement simple. Il y entre un arc ε qui doit satisfaire à une équation trigonométrique dont toutes les racines sont réelles......	373
335-336.	Formation de la solution générale....................................	377
337.	La question ne peut admettre aucune autre solution....................	380
338.	Conséquence de cette solution..	381
339.	Expression de la température moyenne................................	382
340.	Comparaison du mouvement final de la chaleur dans le cube avec le mouvement qui a lieu dans la sphère....................................	383
341.	Application au cas simple que l'on a considéré dans l'article 100.........	385

CHAPITRE IX.

DE LA DIFFUSION DE LA CHALEUR.

SECTION I.

DU MOUVEMENT LIBRE DE LA CHALEUR DANS UNE LIGNE INFINIE.

342-344. On considère le mouvement linéaire de la chaleur dans une ligne infinie dont une partie a été échauffée; l'état initial est représenté par $v = F(x)$. On démontre le théorème suivant :

$$\frac{\pi}{2} F(x) = \int_0^\infty \cos qx \, dq \int_0^\infty F(\alpha) \cos q\alpha \, d\alpha.$$

La fonction $F(x)$ satisfait à la condition

$$F(x) = F(-x).$$

Expression des températures variables............................ 387

348. Application au cas où tous les points de la partie échauffée ont reçu la même température initiale. L'intégrale

$$\int_0^\infty \sin q \cos qx \frac{dq}{q}$$

est $\frac{1}{2}\pi$ si l'on donne à x une valeur comprise entre 1 et -1; et cette intégrale définie a une valeur nulle si x n'est pas compris entre 1 et -1. 394

Articles Pages

349. Application au cas où l'échauffement donné résulte de l'état final que détermine l'action d'un foyer 394

350. Valeurs discontinues de la fonction exprimée par l'intégrale

$$\int_0^\infty \cos qx \frac{dq}{1+q^2} \text{ .... } 395$$

351–353. On considère le mouvement linéaire de la chaleur dans une ligne infinie dont les températures initiales sont représentées par $v=f(x)$ à la distance x vers la droite de l'origine, et par $v=-f(x)$ à la distance x vers la gauche de l'origine. Expression de la température variable d'un point quelconque. On déduit cette solution de l'analyse qui exprime le mouvement de la chaleur dans une ligne infinie 396

354. Expression des températures variables lorsque l'état initial de la partie échauffée est exprimée par une fonction entièrement arbitraire 400

355–358. Les développements des fonctions en sinus ou cosinus d'arcs multiples se transforment en intégrales définies 402

359. On démontre le théorème suivant :

$$\frac{\pi}{2} f(x) = \int_0^\infty \sin qx \, dq \int_0^\infty f(\alpha) \sin q\alpha \, d\alpha.$$

La fonction $f(x)$ satisfait à cette condition :

$$f(-x) = -f(x) \text{ .... } 405$$

360–362. Usage des résultats précédents. On démontre le théorème exprimé par cette équation générale :

$$\pi\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha)\, d\alpha \int_0^\infty \cos q(x-\alpha)\, dq.$$

Cette équation est évidemment comprise dans l'équation (II), rapportée article 234. (*Voir* article 397.) 406

363. La solution précédente fait aussi connaître le mouvement variable de la chaleur dans une ligne infinie dont un point est assujetti à une température constante 411

364. On peut aussi résoudre cette même question au moyen d'une autre forme de l'intégrale. Formation de cette intégrale 413

365–366. Application de cette solution à un prisme infini dont les températures initiales sont nulles. Conséquences remarquables 415

367–369. La même intégrale s'applique à la question de la diffusion de la chaleur. La solution que l'on en déduit est conforme à celle que l'on a rapportée dans les articles 347, 348 420

370–371. Remarques sur diverses formes de l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \text{ .... } 421$$

SECTION II.

DU MOUVEMENT LIBRE DE LA CHALEUR DANS UN SOLIDE INFINI.

Articles | Pages

372-376. L'expression du mouvement variable de la chaleur dans une masse solide infinie, et selon les trois dimensions, se déduit immédiatement de celle du mouvement linéaire. L'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

résout la question proposée. Il ne peut y avoir aucune intégrale plus étendue; elle se déduit aussi de la valeur particuliere

$$v = e^{-n^2 t} \cos nx,$$

ou de celle-ci

$$v = \frac{e^{\frac{-x^2}{4t}}}{\sqrt{t}},$$

qui satisfont l'une et l'autre a l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

La généralité des intégrales que l'on obtient est fondée sur la proposition suivante, que l'on peut regarder comme évidente d'elle-même : deux fonctions des variables x, y, z, t sont nécessairement identiques si elles satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

et si en même temps elles ont la même valeur pour une certaine valeur de t 427

377-383. La chaleur contenue dans une partie du prisme infini, dont tous les autres points ont une température initiale nulle, commence à se distribuer dans toute la masse, et, après un certain intervalle de temps, l'état d'une partie du solide ne dépend point de la distribution de la chaleur initiale, mais seulement de sa quantité. Ce dernier résultat n'est point dû à l'augmentation de la distance comprise entre un point de la masse et la partie qui avait été échauffée; il est entièrement dû à l'augmentation du temps écoulé. — Dans toutes les questions soumises au calcul, les exposants sont des nombres absolus et non des quantités. On ne doit point omettre les parties de ces exposants qui sont incomparablement plus petites que les autres, mais seulement celles qui ont des valeurs absolues extrêmement petites 436

383-385. Les mêmes remarques s'appliquent à la distribution de la chaleur dans un solide infini 444

SECTION III.

DES PLUS HAUTES TEMPÉRATURES DANS UN SOLIDE INFINI.

Articles | Pages

386-387. La chaleur contenue dans une partie du prisme se distribue dans toute la masse. La température d'un point éloigné s'élève progressivement, arrive à sa plus grande valeur et décroît ensuite. Le temps après lequel ce maximum a lieu est une fonction de la distance x. Expression de cette fonction pour un prisme dont les points échauffés ont reçu la même température initiale 448

388-391. Solution d'une question analogue à la précédente. Conséquences diverses de cette solution 451

392-395. On considère le mouvement de la chaleur dans un solide infini, et l'on détermine les plus hautes températures des points très éloignés de la partie primitivement échauffée 456

SECTION IV.

COMPARAISON DES INTÉGRALES.

396. Première intégrale (α) de l'équation

$$(a)\qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Cette intégrale exprime le mouvement de la chaleur dans l'armille 461

397. Seconde intégrale (β) de cette même équation (a). Elle exprime le mouvement linéaire de la chaleur dans un solide infini 463

398. On en déduit deux autres formes (γ) et (δ) de l'intégrale, qui dérivent, comme la précédente, de l'intégrale (α) 464

399-400. Premier développement de la valeur de v, selon les puissances croissantes du temps t. Deuxième développement, selon les puissances de x. Le premier doit contenir une seule fonction arbitraire de t 465

401. Notation propre à représenter ces développements. Le calcul qui en dérive dispense d'effectuer le développement en série 468

402. Application aux équations

$$(c)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

$$(d)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = 0 \text{ .... } 470$$

403. Application aux équations

$$(e)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} = 0,$$

$$(f)\qquad \frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + b\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + c\frac{\partial^6 v}{\partial x^6} + \text{ .... } 471$$

Articles | Pages

404. Usage du théorème (E) de l'article 361 pour former l'intégrale de l'équation (f) de l'article précédent 474

405. Usage du même théorème pour former l'intégrale de l'équation (d), qui convient aux lames élastiques 476

406. Seconde forme de cette même intégrale 479

407. Lemmes qui servent à effectuer ces transformations 480

408. Notre théorème exprimé par l'équation (E), p. 408, convient à un nombre quelconque de variables 482

409. Usage de cette proposition pour former l'intégrale de l'équation (c) de l'article 402 483

410. Application du même théorème à l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \text{..........} \quad 485$$

411. Intégrale de l'équation (e) des surfaces élastiques vibrantes 487

412. Seconde forme de cette intégrale 488

413. Usage du même théorème pour obtenir les intégrales, en sommant les séries qui les représentent. Application à l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Intégrale sous forme finie, contenant deux fonctions arbitraires de t 489

414. Les expressions changent de forme lorsqu'on choisit d'autres limites des intégrales définies 492

415-416. Construction qui sert à démontrer l'équation générale

$$\text{(B)} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos p(x-\alpha)\, dp \text{ ....} \quad 494$$

417. On peut prendre des limites quelconques a et b pour l'intégrale par rapport à α. Ces limites sont celles des valeurs de x qui correspondent à des valeurs subsistantes de la fonction $f(x)$. Toute autre valeur de x donne pour $f(x)$ un résultat nul 499

418. La même remarque convient à l'équation générale

$$f(x) = \frac{1}{X} \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \int_a^b f(\alpha) \cos \frac{2i\pi}{X}(x-\alpha)\, d\alpha,$$

dont le second membre représente une fonction périodique 502

419. Le caractère principal du théorème exprimé par l'équation (B) consiste en ce que le signe f de fonction est transporté à une autre indéterminée α, et que la variable principale x n'est plus que sous le signe cosinus 504

420. Usage de ces théorèmes dans le calcul des quantités imaginaires 505

Articles | Pages

421. Application à l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 506$$

422. Expression générale de la fluxion de l'ordre i, $\dfrac{d^i f(x)}{dx^i}$ 507

423. Construction qui sert à démontrer l'équation générale. — Conséquences relatives à l'étendue des équations de ce genre aux valeurs de $f(x)$ qui répondent aux limites de x, aux valeurs infinies de $f(x)$........ 509

424-427. La méthode qui consiste à déterminer par des intégrales définies les coefficients inconnus du développement d'une fonction de x sous la forme

$$a\varphi(\mu_1 x) + b\varphi(\mu_2 x) + c\varphi(\mu_2 x) + \ldots$$

se déduit des éléments de l'analyse algébrique. Exemple relatif à la distribution de la chaleur dans la sphère solide. En examinant sous ce point de vue le procédé qui sert à déterminer les coefficients, on résout facilement les questions qui peuvent s'élever sur l'emploi de tous les termes du second membre, sur la discontinuité des fonctions, sur les valeurs singulières ou infinies. — Les équations que l'on obtient par cette méthode expriment, ou l'état variable, ou l'état initial des masses de dimensions infinies. — La forme des intégrales qui conviennent à la théorie de la chaleur représente à la fois la composition des mouvements simples et celle d'une infinité d'effets partiels, dus à l'action de tous les points du solide........ 513

428. Remarques générales sur la méthode qui a servi à résoudre les questions analytiques de la théorie de la chaleur........ 524

429. Remarques générales sur les principes dont on a déduit les équations différentielles du mouvement de la chaleur........ 531

430. Dénominations relatives aux propriétés générales de la chaleur........ 537

431. Notations proposées........ 537

432-433. Remarques générales sur la nature des coefficients qui entrent dans les équations différentielles du mouvement de la chaleur........ 538

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

11151 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.