

CAMBRIDGE LIBRARY COLLECTION

Books of enduring scholarly value

Mathematics

From its pre-historic roots in simple counting to the algorithms powering modern desktop computers, from the genius of Archimedes to the genius of Einstein, advances in mathematical understanding and numerical techniques have been directly responsible for creating the modern world as we know it. This series will provide a library of the most influential publications and writers on mathematics in its broadest sense. As such, it will show not only the deep roots from which modern science and technology have grown, but also the astonishing breadth of application of mathematical techniques in the humanities and social sciences, and in everyday life.

Oeuvres de Fourier

Following the French Revolution, the physicist and mathematician Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) taught at the École Normale Supérieure and later succeeded Lagrange at the École Polytechnique. He was promoted to administrative positions under Napoleon, but continued to pursue his scientific interests. From 1822 until his death he served as the permanent secretary for mathematical sciences at the Académie des Sciences. Thanks to his substantial contributions to the field, Fourier's name has passed as an adjective into the mathematical vocabulary of every major language. These selected works were edited by the mathematician Jean Gaston Darboux (1842–1917) and published in two volumes between 1888 and 1890. Volume 1 is given over entirely to the immortal *Théorie analytique de la chaleur* (1822), from which the world learnt about the heat equation and the series which bears Fourier's name.

Cambridge University Press has long been a pioneer in the reissuing of out-of-print titles from its own backlist, producing digital reprints of books that are still sought after by scholars and students but could not be reprinted economically using traditional technology. The Cambridge Library Collection extends this activity to a wider range of books which are still of importance to researchers and professionals, either for the source material they contain, or as landmarks in the history of their academic discipline.

Drawing from the world-renowned collections in the Cambridge University Library and other partner libraries, and guided by the advice of experts in each subject area, Cambridge University Press is using state-of-the-art scanning machines in its own Printing House to capture the content of each book selected for inclusion. The files are processed to give a consistently clear, crisp image, and the books finished to the high quality standard for which the Press is recognised around the world. The latest print-on-demand technology ensures that the books will remain available indefinitely, and that orders for single or multiple copies can quickly be supplied.

The Cambridge Library Collection brings back to life books of enduring scholarly value (including out-of-copyright works originally issued by other publishers) across a wide range of disciplines in the humanities and social sciences and in science and technology.

Cambridge University Press
978-1-108-05938-1 - Oeuvres de Fourier: Volume 1
Edited by Jean Gaston Darboux
Frontmatter
[More information](#)

Oeuvres de Fourier

VOLUME 1

EDITED BY JEAN GASTON DARBOUX



Cambridge University Press
978-1-108-05938-1 - Oeuvres de Fourier: Volume 1
Edited by Jean Gaston Darboux
Frontmatter
[More information](#)

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town,
Singapore, São Paulo, Delhi, Mexico City

Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York

www.cambridge.org

Information on this title: www.cambridge.org/9781108059381

© in this compilation Cambridge University Press 2013

This edition first published 1888
This digitally printed version 2013

ISBN 978-1-108-05938-1 Paperback

This book reproduces the text of the original edition. The content and language reflect the beliefs, practices and terminology of their time, and have not been updated.

Cambridge University Press wishes to make clear that the book, unless originally published by Cambridge, is not being republished by, in association or collaboration with, or with the endorsement or approval of, the original publisher or its successors in title.

ŒUVRES
DE FOURIER.

—————
PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.
—————

ŒUVRES DE FOURIER

PUBLIÉES PAR LES SOINS DE

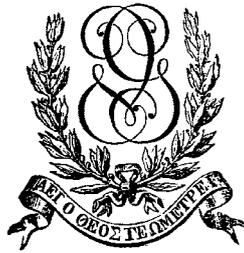
M. GASTON DARBOUX,

SOUS LES AUSPICES DU

MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME PREMIER.

THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR.



PARIS.

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

M DCCC LXXXVIII

Cambridge University Press
978-1-108-05938-1 - Oeuvres de Fourier: Volume 1
Edited by Jean Gaston Darboux
Frontmatter
[More information](#)

AVANT-PROPOS.

L'édition des Oeuvres de Fourier, dont nous publions aujourd'hui le premier Volume, était réclamée depuis longtemps par les physiciens et les géomètres; entreprise avec l'appui bienveillant du Ministère de l'Instruction publique, elle prendra place dans la collection des Documents inédits, à côté des Oeuvres de Laplace, de Lagrange, de Lavoisier, de Fresnel et de Cauchy. Par l'importance de ses découvertes, par l'influence décisive qu'il a exercée sur le développement de la Physique mathématique, Fourier méritait l'hommage qui est rendu aujourd'hui à ses travaux et à sa mémoire. Son nom figurera dignement à côté des noms, illustres entre tous, dont la liste, destinée à s'accroître avec les années, constitue dès à présent un véritable titre d'honneur pour notre pays.

La *Théorie analytique de la Chaleur*, qui forme à elle seule ce premier Volume, a paru en 1822. Ce bel Ouvrage, que l'on peut placer sans injustice à côté des écrits scientifiques les plus parfaits de tous les temps, se recommande par une exposition intéressante et originale des principes fondamentaux;

il éclaire de la lumière la plus vive et la plus pénétrante toutes les idées essentielles que nous devons à Fourier et sur lesquelles doit reposer désormais la Philosophie naturelle; mais il contient, nous devons le reconnaître, beaucoup de négligences, des erreurs de calcul et de détail que Fourier a su éviter dans d'autres écrits. Guidé par les conseils de notre éminent éditeur, M. Gauthier-Villars, nous nous sommes appliqué à faire disparaître les incorrections typographiques. Nous avons refait les calculs, corrigé avec le plus grand soin les renvois inexacts, les erreurs de notation et d'impression, mais en nous attachant toujours à respecter la forme si élégante et si pure que Fourier donne habituellement à sa pensée. Un membre distingué de l'Enseignement supérieur, M. Paul Morin, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes, nous a beaucoup aidé dans cette partie essentielle de notre tâche : nous nous plaisons à lui adresser ici nos plus vifs remerciements. M. Morin veut bien nous continuer son concours pour le second Volume, dont l'impression est déjà commencée.

Les recherches de Fourier relatives à la théorie de la chaleur remontent à la fin du xviii^e siècle; elles ont été communiquées à l'Académie des Sciences le 21 décembre 1807. Cette première publication ne nous est pas parvenue; on ne la connaît que par un extrait de quatre pages inséré en 1808 au *Bulletin de la Société philomathique*; elle a été lue et déposée, mais a, sans doute, été retirée par Fourier dans le courant de l'année 1810.

AVANT-PROPOS.

vii

L'Académie ayant mis au concours, pour 1811, la question suivante :

« Donner la théorie mathématique des lois de la propagation de la chaleur et comparer le résultat de cette théorie à des expériences exactes »,

Fourier envoya, le 28 septembre 1811, un travail très étendu, formé, d'après ses propres déclarations, du Mémoire primitivement soumis à l'Académie et des notes qu'il y avait successivement ajoutées. Ce nouveau travail fut couronné dans la séance publique du 6 janvier 1812. Les juges du concours étaient Lagrange, Laplace, Malus, Haüy et Legendre. Leur Rapport nous a été conservé. Toutes les appréciations, sauf une peut-être, y sont d'une rigoureuse exactitude, et, cependant, il est permis de penser que, dans son ensemble, il ne rend pas pleine justice aux efforts et aux découvertes de Fourier.

« Cette pièce, dit le Rapporteur en parlant du Mémoire de Fourier, renferme les véritables équations différentielles de la transmission de la chaleur, soit à l'intérieur des corps, soit à leur surface; et la nouveauté du sujet, jointe à son importance, a déterminé la Classe à couronner cet Ouvrage, en observant cependant que la manière dont l'Auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose

» à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du
» côté de la rigueur. »

Le manuscrit de Fourier fait partie, aujourd'hui encore, des Archives de l'Académie. Le grand géomètre, devenu Secrétaire perpétuel après la mort de Delambre, l'a fait imprimer, sans y apporter aucun changement, dans les Volumes de *Mémoires* pour 1819-1820 et 1821-1822, deux ans après la publication de la *Théorie de la Chaleur*. Fourier désirait, sans doute, établir ainsi d'une manière incontestable ses droits de priorité; car la première Partie du Mémoire de 1811, celle qui a paru dans le Volume pour 1819-1820, ne diffère qu'en des points tout à fait secondaires de la rédaction définitive à laquelle il s'est arrêté dans la *Théorie de la Chaleur*. Nous avons donc renoncé à reproduire cette première Partie; mais la seconde, qui a été imprimée en 1826, dans le Volume des *Mémoires* pour 1821-1822, offre le plus vif intérêt; elle commencera notre second Volume et sera, croyons-nous, bien accueillie de tous.

Il y a aujourd'hui quatre-vingts ans que Fourier fit à l'Académie des Sciences sa première Communication sur les études qui ont occupé toute sa vie. Les méthodes dont l'illustre savant a enrichi la Science trouvent maintenant devant elles un champ vaste et presque inexploré d'applications nouvelles dans la théorie moderne de l'électricité. Puisse notre édition les répandre encore, puisse-t-elle maintenir et accroître dans

AVANT-PROPOS.

ix

notre pays et parmi nos jeunes géomètres le gout de la Physique mathématique. « L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue, elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même, et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître et que cette science doit toujours conserver : ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels. » C'est par ces réflexions, empruntées à l'admirable *Discours préliminaire* que l'on va lire, que nous terminerons ces quelques lignes dans lesquelles nous nous proposons surtout de remercier tous ceux qui ont pris part à notre publication ou qui l'ont rendue possible.

21 décembre 1887.

GASTON DARBOUX,

de l'Académie des Sciences.

F.

b

Cambridge University Press
978-1-108-05938-1 - Oeuvres de Fourier: Volume 1
Edited by Jean Gaston Darboux
Frontmatter
[More information](#)

THEORIE ANALYTIQUE
DE
LA CHALEUR.

DEUXIÈME ÉDITION

Cambridge University Press
978-1-108-05938-1 - Oeuvres de Fourier: Volume 1
Edited by Jean Gaston Darboux
Frontmatter
[More information](#)

THÉORIE
ANALYTIQUE
DE LA CHALEUR,
PAR M. FOURIER.



A PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,
LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE
ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

Cambridge University Press
978-1-108-05938-1 - Oeuvres de Fourier: Volume 1
Edited by Jean Gaston Darboux
Frontmatter
[More information](#)

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

Les causes primordiales ne nous sont point connues, mais elles sont assujetties à des lois simples et constantes que l'on peut découvrir par l'observation, et dont l'étude est l'objet de la Philosophie naturelle.

La chaleur pénètre, comme la gravité, toutes les substances de l'univers; ses rayons occupent toutes les parties de l'espace. Le but de notre Ouvrage est d'exposer les lois mathématiques que suit cet élément. Cette théorie formera désormais une des branches les plus importantes de la Physique générale.

Les connaissances que les plus anciens peuples avaient pu acquérir dans la Mécanique rationnelle ne nous sont point parvenues, et l'histoire de cette science, si l'on excepte les premiers théorèmes sur l'harmonie, ne remonte point au delà des découvertes d'Archimède. Ce grand géomètre expliqua les principes mathématiques de l'équilibre des solides et des fluides. Il s'écoula environ dix-huit siècles avant que Galilée, premier inventeur des théories dynamiques, découvrit les lois du mouvement des corps graves. Newton embrassa dans cette science nouvelle tout le système de l'univers. Les successeurs de ces philosophes ont donné à ces théories une étendue et une perfection admirables; ils nous ont appris que les phénomènes les plus divers sont soumis à un petit nombre de lois fondamentales, qui se reproduisent dans tous les actes de la nature. On a reconnu que les mêmes principes règlent tous les mouvements des astres, leur forme, les inégalités

de leurs cours, l'équilibre et les oscillations des mers, les vibrations harmoniques de l'air et des corps sonores, la transmission de la lumière, les actions capillaires, les ondulations des liquides, enfin, les effets les plus composés de toutes les forces naturelles; et l'on a confirmé cette pensée de Newton : *Quod tam paucis tam multa præstet Geometria gloriatur* ⁽¹⁾.

Mais, quelle que soit l'étendue des théories mécaniques, elles ne s'appliquent point aux effets de la chaleur. Ils composent un ordre spécial de phénomènes qui ne peuvent s'expliquer par les principes du mouvement et de l'équilibre. On possède depuis longtemps des instruments ingénieux propres à mesurer plusieurs de ces effets; on a recueilli des observations précieuses; mais on ne connaît ainsi que des résultats partiels, et non la démonstration mathématique des lois qui les comprennent tous.

J'ai déduit ces lois d'une longue étude et de la comparaison attentive des faits connus jusqu'à ce jour; je les ai tous observés de nouveau, dans le cours de plusieurs années, avec les instruments les plus précis dont on ait encore fait usage.

Pour fonder cette théorie, il était d'abord nécessaire de distinguer et de définir avec précision les propriétés élémentaires qui déterminent l'action de la chaleur. J'ai reconnu ensuite que tous les phénomènes qui dépendent de cette action se résolvent en un très petit nombre de faits généraux et simples; et, par là, toute question physique de ce genre est ramenée à une recherche d'Analyse mathématique. J'en ai conclu que, pour déterminer en nombre les mouvements les plus variés de la chaleur, il suffit de soumettre chaque substance à trois observations fondamentales. En effet, les différents corps ne pos-

⁽¹⁾ *Philosophiæ naturalis principia mathematica. Præfatio ad lectorem. Ac gloriatur Geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet.* G. D.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

xvii

sèdent point au même degré la faculté de *contenir* la chaleur, *de la recevoir* ou *de la transmettre* à travers leur superficie, et *de la conduire* dans l'intérieur de la masse. Ce sont trois qualités spécifiques que notre théorie distingue clairement et qu'elle apprend à mesurer.

Il est facile de juger combien ces recherches intéressent les sciences physiques et l'économie civile, et quelle peut être leur influence sur les progrès des arts qui exigent l'emploi et la distribution du feu. Elles ont aussi une relation nécessaire avec le Système du monde, et l'on connaît ces rapports si l'on considère les grands phénomènes qui s'accomplissent près de la surface du globe terrestre.

En effet, le rayon du Soleil dans lequel cette planète est incessamment plongée pénètre l'air, la terre et les eaux; ses éléments se divisent, changent de directions dans tous les sens; et, pénétrant dans la masse du globe, ils en élèveraient de plus en plus la température moyenne, si cette chaleur ajoutée n'était pas exactement compensée par celle qui s'échappe en rayons de tous les points de la superficie, et se répand dans les cieux.

Les divers climats, inégalement exposés à l'action de la chaleur solaire, ont acquis, après un temps immense, des températures propres à leur situation. Cet effet est modifié par plusieurs causes accessoires, telles que l'élévation et la figure du sol, le voisinage et l'étendue des continents et des mers, l'état de la surface, la direction des vents.

L'intermittence des jours et des nuits, les alternatives des saisons occasionnent, dans la terre solide, des variations périodiques qui se renouvellent chaque jour ou chaque année; mais ces changements sont d'autant moins sensibles que le point où on les mesure est plus distant de la surface. On ne peut remarquer aucune variation diurne à la profondeur d'environ 3^m; et les variations annuelles cessent d'être appréciables à une profondeur beaucoup moindre que 60^m. La température

F.

c

des lieux profonds est donc sensiblement fixe dans un lieu donné ; mais elle n'est pas la même pour tous les points d'un même parallèle ; en général, elle s'élève lorsqu'on s'approche de l'équateur.

La chaleur que le Soleil a communiquée au globe terrestre, et qui a produit la diversité des climats, est assujettie maintenant à un mouvement devenu uniforme. Elle s'avance dans l'intérieur de la masse qu'elle pénètre tout entière, et en même temps elle s'éloigne du plan de l'équateur, et va se perdre dans l'espace à travers les contrées polaires.

Dans les hautes régions de l'atmosphère, l'air, très rare et diaphane, ne retient qu'une faible partie de la chaleur des rayons solaires : c'est la cause principale du froid excessif des lieux élevés. Les couches inférieures, plus denses et plus échauffées par la terre et les eaux, se dilatent et s'élèvent ; elles se refroidissent par l'effet même de la dilatation. Les grands mouvements de l'air, comme les vents alizés qui soufflent entre les tropiques, ne sont point déterminés par les forces attractives de la Lune et du Soleil. L'action de ces astres ne produit sur un fluide aussi rare, à une aussi grande distance, que des oscillations très peu sensibles. Ce sont les changements des températures qui déplacent périodiquement toutes les parties de l'atmosphère.

Les eaux de l'Océan sont différemment exposées par leur surface aux rayons du Soleil, et le fond du bassin qui les renferme est échauffé très inégalement depuis les pôles jusqu'à l'équateur. Ces deux causes, toujours présentes, et combinées avec la gravité et la force centrifuge, entretiennent des mouvements immenses dans l'intérieur des mers. Elles en déplacent et en mêlent toutes les parties, et produisent ces courants réguliers et généraux que les navigateurs ont observés.

La chaleur rayonnante qui s'échappe de la superficie de tous les corps et traverse les milieux élastiques ou les espaces vides d'air a des lois spéciales, et elle concourt aux phénomènes les plus variés. On

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

xix

connaissait déjà l'explication physique de plusieurs de ces faits; la théorie mathématique que j'ai formée en donne la mesure exacte. Elle consiste, en quelque sorte, dans une seconde catoptrique, qui a ses théorèmes propres, et sert à déterminer par le calcul tous les effets de la chaleur directe ou réfléchie.

Cette énumération des objets principaux de la théorie fait assez connaître la nature des questions que je me suis proposées. Quelles sont ces qualités élémentaires que, dans chaque substance, il est nécessaire d'observer, et quelles expériences sont les plus propres à les déterminer exactement? Si des lois constantes règlent la distribution de la chaleur dans la matière solide, quelle est l'expression mathématique de ces lois? et par quelle analyse peut-on déduire de cette expression la solution complète des questions principales?

Pourquoi les températures terrestres cessent-elles d'être variables à une profondeur si petite par rapport au rayon du globe? Chaque inégalité du mouvement de cette planète devant occasionner au-dessous de la surface une oscillation de la chaleur solaire, quelle relation y a-t-il entre la durée de la période et la profondeur où les températures deviennent constantes?

Quel temps a dû s'écouler pour que les climats pussent acquérir les températures diverses qu'ils conservent aujourd'hui; et quelles causes peuvent faire varier maintenant leur chaleur moyenne? Pourquoi les seuls changements annuels de la distance du Soleil à la Terre ne causent-ils pas à la surface de cette planète des changements très considérables dans les températures?

A quel caractère pourrait-on reconnaître que le globe terrestre n'a pas entièrement perdu sa chaleur d'origine, et quelles sont les lois exactes de la déperdition?

Si cette chaleur fondamentale n'est point totalement dissipée,

comme l'indiquent plusieurs observations, elle peut être immense à de grandes profondeurs, et toutefois elle n'a plus aujourd'hui aucune influence sensible sur la température moyenne des climats : les effets que l'on y observe sont dus à l'action des rayons solaires. Mais, indépendamment de ces deux sources de chaleur, l'une fondamentale et primitive, propre au globe terrestre, l'autre due à la présence du Soleil, n'y a-t-il point une cause plus universelle, qui détermine la *température du ciel*, dans la partie de l'espace qu'occupe maintenant le système solaire? Puisque les faits observés rendent cette cause nécessaire, quelles sont, dans cette question entièrement nouvelle, les conséquences d'une théorie exacte? comment pourra-t-on déterminer cette valeur constante de la *température de l'espace*, et en déduire celle qui convient à chaque planète?

Il faut ajouter à ces questions celles qui dépendent des propriétés de la chaleur rayonnante. On connaît très distinctement la cause physique de la réflexion du froid, c'est-à-dire de la réflexion d'une moindre chaleur; mais quelle est l'expression mathématique de cet effet?

De quels principes généraux dépendent les températures atmosphériques, soit que le thermomètre qui les mesure reçoive immédiatement les rayons du Soleil, sur une surface métallique ou dépolie, soit que cet instrument demeure exposé, durant la nuit, sous un ciel exempt de nuages, au contact de l'air, au rayonnement des corps terrestres, et à celui des parties de l'atmosphère les plus éloignées et les plus froides.

L'intensité des rayons qui s'échappent d'un point de la superficie des corps échauffés variant avec leur inclinaison suivant une loi que les expériences ont indiquée, n'y a-t-il pas un rapport mathématique nécessaire entre cette loi et le fait général de l'équilibre de la chaleur; et quelle est la cause physique de cette inégale intensité?

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

xxi

Enfin, lorsque la chaleur pénètre les masses fluides et y détermine des mouvements intérieurs, par les changements continuels de température et de densité de chaque molécule, peut-on encore exprimer par des équations différentielles les lois d'un effet aussi composé; et quel changement en résulte-t-il dans les équations générales de l'Hydrodynamique?

Telles sont les questions principales que j'ai résolues, et qui n'avaient point encore été soumises au calcul. Si l'on considère, de plus, les rapports multipliés de cette théorie mathématique avec les usages civils et les arts techniques, on reconnaîtra toute l'étendue de ses applications. Il est manifeste qu'elle comprend une série entière de phénomènes distincts, et qu'on ne pourrait en omettre l'étude sans retrancher une partie notable de la science de la nature.

Les principes de cette théorie sont déduits, comme ceux de la Mécanique rationnelle, d'un très petit nombre de faits primordiaux, dont les géomètres ne considèrent point la cause, mais qu'ils admettent comme résultant des observations communes et confirmées par toutes les expériences.

Les équations différentielles de la propagation de la chaleur expriment les conditions les plus générales, et ramènent les questions physiques à des problèmes d'Analyse pure, ce qui est proprement l'objet de la théorie. Elles ne sont pas moins rigoureusement démontrées que les équations générales de l'équilibre et du mouvement. C'est pour rendre cette comparaison plus sensible que nous avons toujours préféré des démonstrations analogues à celles des théorèmes qui servent de fondement à la Statique et à la Dynamique. Ces équations subsistent encore, mais elles reçoivent une forme différente, si elles expriment la distribution de la chaleur lumineuse dans les corps diaphanes, ou les mouvements que les changements de température et de densité occa-

sionnent dans l'intérieur des fluides. Les coefficients qu'elles renferment sont sujets à des variations dont la mesure exacte n'est pas encore connue; mais, dans toutes les questions naturelles qu'il nous importe le plus de considérer, les limites des températures sont assez peu différentes pour que l'on puisse omettre ces variations des coefficients.

Les équations du mouvement de la chaleur, comme celles qui expriment les vibrations des corps sonores, ou les dernières oscillations des liquides, appartiennent à une des branches de la Science du calcul les plus récemment découvertes, et qu'il importait beaucoup de perfectionner. Après avoir établi ces équations différentielles, il fallait en obtenir les intégrales; ce qui consiste à passer d'une expression commune à une solution propre, assujettie à toutes les conditions données. Cette recherche difficile exigeait une analyse spéciale, fondée sur des théorèmes nouveaux dont nous ne pourrions ici faire connaître l'objet. La méthode qui en dérive ne laisse rien de vague et d'indéterminé dans les solutions; elle les conduit jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire de toute recherche, et sans laquelle on n'arriverait qu'à des transformations inutiles.

Ces mêmes théorèmes qui nous ont fait connaître les intégrales des équations du mouvement de la chaleur s'appliquent immédiatement à des questions d'Analyse générale et de Dynamique dont on désirait depuis longtemps la solution.

L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue: elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même, et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours con-

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

xxiii

server : ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels.

On voit, par exemple, qu'une même expression, dont les géomètres avaient considéré les propriétés abstraites et qui, sous ce rapport, appartient à l'Analyse générale, représente aussi le mouvement de la lumière dans l'atmosphère, qu'elle détermine les lois de la diffusion de la chaleur dans la matière solide, et qu'elle entre dans toutes les questions principales de la Théorie des probabilités.

Les équations analytiques, ignorées des anciens géomètres, que Descartes a introduites le premier dans l'étude des courbes et des surfaces, ne sont pas restreintes aux propriétés des figures et à celles qui sont l'objet de la Mécanique rationnelle; elles s'étendent à tous les phénomènes généraux. Il ne peut y avoir de langage plus universel et plus simple, plus exempt d'erreurs et d'obscurités, c'est-à-dire plus digne d'exprimer les rapports invariables des êtres naturels.

Considérée sous ce point de vue, l'Analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle-même; elle définit tous les rapports sensibles, mesure les temps, les espaces, les forces, les températures; cette science difficile se forme avec lenteur, mais elle conserve tous les principes qu'elle a une fois acquis; elle s'accroît et s'affermi sans cesse, au milieu de tant de variations et d'erreurs de l'esprit humain.

Son attribut principal est la clarté; elle n'a point de signes pour exprimer les notions confuses. Elle rapproche les phénomènes les plus divers et découvre les analogies secrètes qui les unissent. Si la matière nous échappe, comme celle de l'air et de la lumière, par son extrême ténuité, si les corps sont placés loin de nous, dans l'immensité de l'espace, si l'homme veut connaître le spectacle des cieux pour des époques successives que séparent un grand nombre de siècles, si les actions de la gravité et de la chaleur s'exercent dans l'intérieur du globe solide à

des profondeurs qui seront toujours inaccessibles, l'Analyse mathématique peut encore saisir les lois de ces phénomènes. Elle nous les rend présents et mesurables, et semble être une faculté de la raison humaine destinée à suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens; et, ce qui est plus remarquable encore, elle suit la même marche dans l'étude de tous les phénomènes; elle les interprète par le même langage, comme pour attester l'unité et la simplicité du plan de l'univers, et rendre encore plus manifesté cet ordre immuable qui préside à toutes les causes naturelles.

Les questions de la Théorie de la chaleur offrent autant d'exemples de ces dispositions simples et constantes qui naissent des lois générales de la nature; et, si l'ordre qui s'établit dans ces phénomènes pouvait être saisi par nos sens, ils nous causeraient une impression comparable à celles des résonances harmoniques.

Les formes des corps sont variées à l'infini; la distribution de la chaleur qui les pénètre peut être arbitraire et confuse; mais toutes les inégalités s'effacent rapidement et disparaissent à mesure que le temps s'écoule. La marche du phénomène, devenue plus régulière et plus simple, demeure enfin assujettie à une loi déterminée, qui est la même pour tous les cas et qui ne porte plus aucune empreinte sensible de la disposition initiale.

Toutes les observations confirment ces conséquences. L'analyse dont elles dérivent sépare et exprime clairement : 1° les conditions générales, c'est-à-dire celles qui résultent des propriétés naturelles de la chaleur; 2° l'effet accidentel, mais subsistant, de la figure ou de l'état des surfaces; 3° l'effet non durable de la distribution primitive.

Nous avons démontré dans cet Ouvrage tous les principes de la Théorie de la chaleur, et résolu toutes les questions fondamentales. On aurait pu les exposer sous une forme plus concise, omettre les

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

xxv

questions simples, et présenter d'abord les conséquences les plus générales; mais on a voulu montrer l'origine même de la Théorie et ses progrès successifs. Lorsque cette connaissance est acquise, et que les principes sont entièrement fixés, il est préférable d'employer immédiatement les méthodes analytiques les plus étendues, comme nous l'avons fait dans les recherches ultérieures. C'est aussi la marche que nous suivrons désormais dans les Mémoires qui seront joints à cet Ouvrage, et qui en forment en quelque sorte le complément, et par là nous aurons concilié, autant qu'il peut dépendre de nous, le développement nécessaire des principes avec la précision qui convient aux applications de l'Analyse.

Ces Mémoires auront pour objet la théorie de la chaleur rayonnante, la question des températures terrestres, celle de la température des habitations, la comparaison des résultats théoriques avec ceux que nous avons observés dans diverses expériences, enfin la démonstration des équations différentielles du mouvement de la chaleur dans les fluides.

L'Ouvrage que nous publions aujourd'hui a été écrit depuis longtemps; diverses circonstances en ont retardé et souvent interrompu l'impression. Dans cet intervalle, la Science s'est enrichie d'observations importantes; les principes de notre Analyse, que l'on n'avait pas saisis d'abord, ont été mieux connus; on a discuté et confirmé les résultats que nous en avons déduits. Nous avons appliqué nous-même ces principes à des questions nouvelles, et changé la forme de quelques démonstrations. Les retards de la publication auront contribué à rendre l'Ouvrage plus clair et plus complet.

Nos premières recherches analytiques sur la communication de la chaleur ont eu pour objet la distribution entre des masses disjointes; on les a conservées dans la Section II du Chapitre IV. Les questions relatives aux corps continus, qui forment la théorie proprement dite,

F.

d

ont été résolues plusieurs années après; cette théorie a été exposée, pour la première fois, dans un Ouvrage manuscrit remis à l'Institut de France à la fin de l'année 1807, et dont il a été publié un extrait dans le *Bulletin des Sciences* (Société philomathique, année 1808, p. 112-116). Nous avons joint à ce Mémoire et remis successivement des Notes assez étendues, concernant la convergence des séries, la diffusion de la chaleur dans un prisme infini, son émission dans les espaces vides d'air, les constructions propres à rendre sensibles les théorèmes principaux, et l'analyse du mouvement périodique à la surface du globe terrestre. Notre second Mémoire sur la propagation de la chaleur a été déposé aux Archives de l'Institut, le 28 septembre 1811. Il est formé du précédent et des Notes déjà remises; on y a omis des constructions géométriques et des détails d'Analyse qui n'avaient pas un rapport nécessaire avec la question physique, et l'on a ajouté l'équation générale qui exprime l'état de la surface. Ce second Ouvrage a été livré à l'impression dans le cours de 1821, pour être inséré dans la Collection de l'Académie des Sciences. Il est imprimé sans aucun changement ni addition; le texte est littéralement conforme au Manuscrit déposé, qui fait partie des Archives de l'Institut.

On pourra trouver dans ce Mémoire et dans les écrits qui l'ont précédé un premier exposé des applications que ne contient pas notre Ouvrage actuel; elles seront traitées dans les Mémoires subséquents avec plus d'étendue, et, s'il nous est possible, avec plus de clarté. Les résultats de notre travail concernant ces mêmes questions sont aussi indiqués dans divers articles déjà rendus publics. L'extrait inséré dans les *Annales de Chimie et de Physique* fait connaître l'ensemble de nos recherches (t. III, p. 350-376, année 1816). Nous avons publié dans ces Annales deux Notes séparées, concernant la chaleur rayonnante (t. IV, p. 128-145, année 1817, et t. VI, p. 259-303, année 1817).