

Cambridge University Press

978-1-108-05935-0 - Bernard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass

Edited by Heinrich Martin Weber and Richard Dedekind

Frontmatter

[More information](#)

CAMBRIDGE LIBRARY COLLECTION

Books of enduring scholarly value

Mathematics

From its pre-historic roots in simple counting to the algorithms powering modern desktop computers, from the genius of Archimedes to the genius of Einstein, advances in mathematical understanding and numerical techniques have been directly responsible for creating the modern world as we know it. This series will provide a library of the most influential publications and writers on mathematics in its broadest sense. As such, it will show not only the deep roots from which modern science and technology have grown, but also the astonishing breadth of application of mathematical techniques in the humanities and social sciences, and in everyday life.

Bernard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass

Great mathematicians write for the future and Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–66) was one of the greatest mathematicians of all time. Edited by Heinrich Martin Weber, with assistance from Richard Dedekind, this edition of his collected works in German first appeared in 1876. Riemann's interests ranged from pure mathematics to mathematical physics. He wrote a short paper on number theory which provided the key to the prime number theorem, and his zeta hypothesis has given mathematicians the most famous of today's unsolved problems. Moreover, his famous 1854 lecture 'On the hypotheses which underlie geometry' set in motion studies which culminated in Einstein's general theory of relativity. Even Riemann's over-optimistic use of the Dirichlet principle to prove the conformal mapping theorem turned out to be immensely fruitful. The alert reader will further profit from finding here the seeds of modern distribution theory, algebraic topology and measure theory.

Cambridge University Press

978-1-108-05935-0 - Bernard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass

Edited by Heinrich Martin Weber and Richard Dedekind

Frontmatter

[More information](#)

Cambridge University Press has long been a pioneer in the reissuing of out-of-print titles from its own backlist, producing digital reprints of books that are still sought after by scholars and students but could not be reprinted economically using traditional technology. The Cambridge Library Collection extends this activity to a wider range of books which are still of importance to researchers and professionals, either for the source material they contain, or as landmarks in the history of their academic discipline.

Drawing from the world-renowned collections in the Cambridge University Library and other partner libraries, and guided by the advice of experts in each subject area, Cambridge University Press is using state-of-the-art scanning machines in its own Printing House to capture the content of each book selected for inclusion. The files are processed to give a consistently clear, crisp image, and the books finished to the high quality standard for which the Press is recognised around the world. The latest print-on-demand technology ensures that the books will remain available indefinitely, and that orders for single or multiple copies can quickly be supplied.

The Cambridge Library Collection brings back to life books of enduring scholarly value (including out-of-copyright works originally issued by other publishers) across a wide range of disciplines in the humanities and social sciences and in science and technology.

Cambridge University Press

978-1-108-05935-0 - Bernard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass

Edited by Heinrich Martin Weber and Richard Dedekind

Frontmatter

[More information](#)

Bernard Riemann's
Gesammelte
mathematische Werke
und
wissenschaftlicher
Nachlass

EDITED BY HEINRICH MARTIN WEBER
AND RICHARD DEDEKIND



CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

Cambridge University Press

978-1-108-05935-0 - Bernard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass

Edited by Heinrich Martin Weber and Richard Dedekind

Frontmatter

[More information](#)

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

University Printing House, Cambridge, CB2 8BS, United Kingdom

Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York

Cambridge University Press is part of the University of Cambridge.
It furthers the University's mission by disseminating knowledge in the pursuit of
education, learning and research at the highest international levels of excellence.

www.cambridge.org

Information on this title: www.cambridge.org/9781108059350

© in this compilation Cambridge University Press 2013

This edition first published 1876

This digitally printed version 2013

ISBN 978-1-108-05935-0 Paperback

This book reproduces the text of the original edition. The content and language reflect
the beliefs, practices and terminology of their time, and have not been updated.

Cambridge University Press wishes to make clear that the book, unless originally published
by Cambridge, is not being republished by, in association or collaboration with, or
with the endorsement or approval of, the original publisher or its successors in title.

Cambridge University Press

978-1-108-05935-0 - Bernard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass

Edited by Heinrich Martin Weber and Richard Dedekind

Frontmatter

[More information](#)

BERNHARD RIEMANN'S
GESAMMELTE
MATHEMATISCHE WERKE

UND

WISSENSCHAFTLICHER NACHLASS.

HERAUSGEGEBEN

UNTER MITWIRKUNG VON R. DEDEKIND

VON

H. WEBER.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1876.

Cambridge University Press

978-1-108-05935-0 - Bernard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass

Edited by Heinrich Martin Weber and Richard Dedekind

Frontmatter

[More information](#)

Cambridge University Press

978-1-108-05935-0 - Bernard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass

Edited by Heinrich Martin Weber and Richard Dedekind

Frontmatter

[More information](#)

Vorrede.

Das Werk, welches hiermit in die Oeffentlichkeit tritt, ist die endliche Ausführung eines seit lange geplanten Unternehmens. Bei der Bedeutung, welche die grossen Schöpfungen Riemann's für die Entwicklung der neueren Mathematik haben, gehören die meisten der Riemann'schen Abhandlungen zu den unentbehrlichsten Hilfsmitteln des Mathematikers, und eine Sammlung seiner Werke dürfte daher einem allgemein gehegten Wunsche um so mehr entgegen kommen, als die meisten derselben im Buchhandel nicht oder nur schwer zu erhalten sind. Es kommt dazu die dringende Pflicht gegen die Wissenschaft, die im handschriftlichen Nachlass noch verborgenen Untersuchungen und Gedanken der Oeffentlichkeit nicht länger vorzuenthalten.

Schon im Frühjahr 1872 war daher unter mehreren Freunden Riemann's der Plan zu einer solchen Sammlung entstanden und Clebsch hatte mit seiner ganzen Thatkraft die Leitung des Unternehmens in die Hand genommen, und sich mit Dedekind vereinigt, in dessen Besitz nach Riemann's Wunsch der handschriftliche Nachlass nach des Verfassers Tod gekommen war, und der bereits mehrere Abhandlungen aus demselben herausgegeben hatte.

Durch den beklagenswerthen und unerwarteten Tod von Clebsch gerieth leider das Vorhaben in's Stocken und blieb längere Zeit gänzlich liegen. Als mir im November 1874 Dedekind im Namen der Frau Professorin Riemann den Vorschlag machte, die Leitung der Herausgabe zu übernehmen, bin ich nicht ohne schwere Bedenken darauf eingegangen. Denn obwohl ich von dem Umfang der damit verbundenen Arbeit damals noch keine richtige Vorstellung hatte, war ich mir der zu übernehmenden Verantwortung wohl bewusst. Nur die Erwägung, dass im Falle meiner Weigerung die Ausführung abermals auf lange Zeit hinausgeschoben zu werden, wenn nicht gänzlich zu scheitern drohte, half mir meine Bedenken überwinden, und so entschloss ich mich, was an mir läge, zu thun, um das Unternehmen zu einem befriedigenden Abschluss zu bringen, da Dedekind mir die Versicherung gab, mich bei der Arbeit nach Kräften zu unterstützen, ein Versprechen, welches er treulich gehalten hat.

IV

Vorrede.

Die von Riemann selbst oder nach seinem Tode bereits veröffentlichten Arbeiten wurden revidirt, hin und wieder durch einen im Nachlass aufgefundenen Zusatz bereichert, und in kleinen Ungenauigkeiten verbessert, sonst aber in unveränderter Form aufgenommen. Nur die Abhandlung über die Flächen vom kleinsten Inhalt hat in Folge einer von K. Hattendorff auf meinen Wunsch ausgeführten Uebersetzung einige wesentlichere Aenderungen erfahren.

Von den im Nachlass enthaltenen Entwürfen fanden sich einige in fast druckfertiger Form vor, andere aber in einem so fragmentarischen Zustande, dass die Verknüpfung und Darstellung erhebliche Schwierigkeiten machte. Von der grossen Menge nur Formeln ohne Text enthaltender Papiere war wenig für den Druck zu verwerthen. Besonders hervorzuheben ist unter den ersteren die Arbeit über den Rückstand in der Leidener Flasche, welche Riemann schon im Anschluss an die Mittheilung in der Göttinger Naturforscher-Versammlung zur Publication vorbereitet hatte, ferner die in lateinischer Sprache geschriebene Beantwortung einer Preisfrage der Pariser Akademie über isotherme Curven, welche besonders deshalb von hohem Interesse ist, weil darin Riemann's Untersuchungen über die allgemeinen Eigenschaften der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten in den Grundzügen niedergelegt sind und eine merkwürdige Verwendung finden. Die Darstellung in dieser Abhandlung ist eine äusserst knappe, und die Wege, auf denen die endlichen Resultate erhalten wurden, finden sich darin nur im Allgemeinen angedeutet. Von der Ausführung einer beabsichtigten zweiten eingehenderen Darstellung des Gegenstandes wurde Riemann durch seinen Gesundheitszustand abgehalten. Dass ich im Stande bin, diese schöne Untersuchung in der letzten von Riemann herrührenden Redaction zum Abdruck zu bringen, verdanke ich der Güte des beständigen Secretärs der Pariser Akademie, Herrn Dumas, welcher auf ein namens der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften von Herrn Wöhler an ihn gerichtetes Ansuchen mit der dankenswerthesten Bereitwilligkeit mir das Originalmanuscript zur Verfügung stellte.

Von Riemann's Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten liegt der erste Theil in ziemlich druckfertiger Form von Riemann's Hand vor und war vermuthlich zu der Publication bestimmt, die in der Abhandlung über Abel'sche Functionen angekündigt ist, aber nicht zur Ausführung kam. Ein zweiter Theil, der die wahre Verallgemeinerung der Theorie der hypergeometrischen Reihen enthält, fand sich nur im ersten Entwurfe vor, jedoch so, dass der Gedankengang vollständig hergestellt werden konnte.

Cambridge University Press

978-1-108-05935-0 - Bernard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass

Edited by Heinrich Martin Weber and Richard Dedekind

Frontmatter

[More information](#)

Vorrede.

V

Ferner ist hier noch der in italienischer Sprache geschriebene Anfang zu einer Untersuchung über die Darstellbarkeit des Quotienten zweier hypergeometrischer Reihen durch einen Kettenbruch zu erwähnen, deren Bearbeitung H. A. Schwarz in Göttingen übernommen hat, dem ich hierfür sowie für manchen Rath an anderen Stellen hier meinen Dank ausspreche.

Obwohl die Vorlesungen Riemann's dem ursprünglichen Plane nach von dieser Sammlung ausgeschlossen sind, so habe ich mich doch zur Aufnahme zweier kleinerer, in sich abgeschlossener Untersuchungen über die Convergenz der p -fach unendlichen Theta-Reihe und über die Abel'schen Functionen für den Fall $p = 3$ entschlossen, bei deren Bearbeitung ein von G. Roch geführtes Vorlesungsheft zu Grunde gelegt werden konnte, theils wegen des grossen Interesses, welches die Gegenstände haben, theils weil eine zusammenhängende Veröffentlichung dieser Vorlesungen, wie es scheint, vorläufig nicht in Aussicht steht.

Ich erwähne hier noch die den Anhang bildenden naturphilosophischen Fragmente, welche wenigstens eine ungefähre Vorstellung von dem Inhalt der Speculationen geben können, denen Riemann einen grossen Theil seiner Gedankenarbeit widmete und die ihn viele Jahre seines Lebens hindurch begleitet haben. Diese Bruchstücke dürften trotz ihrer Lückenhaftigkeit und Unvollständigkeit geeignet sein, auch in weiteren Kreisen Aufmerksamkeit zu erregen, wenn sie auch nicht viel mehr als die Anfänge und die allgemeinsten Grundzüge einer eigenthümlichen und tiefsinnigen Weltanschauung enthalten.

Eine willkommene Beigabe für die Freunde und Verehrer Riemann's wird endlich die biographische Skizze sein, welche Dedekind auf meinen Wunsch auf der Grundlage von Briefen und anderen Mittheilungen der Riemann'schen Familie, unterstützt durch seine eigenen Erinnerungen verfasst hat.

Was die Anordnung des Stoffes betrifft, so ist in den beiden ersten Abtheilungen die chronologische Reihenfolge streng inne gehalten worden; in der dritten Abtheilung, welche den Nachlass enthält, konnte diese Anordnung nicht ganz consequent durchgeführt werden, theils weil sich die Entstehungszeit hier nicht immer vollständig feststellen liess, theils weil die mehr ausgeführten Untersuchungen dem Fragmentarischen vorangestellt werden sollten.

Königsberg, im März 1876.

H. Weber.

Cambridge University Press

978-1-108-05935-0 - Bernard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass

Edited by Heinrich Martin Weber and Richard Dedekind

Frontmatter

[More information](#)

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Abhandlungen, die von Riemann selbst veröffentlicht sind.

	Seite
I. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. (Inauguraldissertation, Göttingen 1851.) . . .	3
Anmerkungen zur vorstehenden Abhandlung	46
II. Ueber die Gesetze der Vertheilung von Spannungselectricität in ponderablen Körpern, wenn diese nicht als vollkommene Leiter oder Nichtleiter, sondern als dem Enthalten von Spannungselectricität mit endlicher Kraft widerstrebend betrachtet werden	48
(Amtlicher Bericht über die 31. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Göttingen im September 1854. Vortrag gehalten am 21. September 1854.)	
III. Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe	54
(Aus Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, Bd. 95. 28. März 1855.)	
IV. Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $H'(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen	62
(Aus dem siebenten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1857.)	
V. Selbstanzeige der vorstehenden Abhandlung	79
(Göttinger Nachrichten. 1857. No. I.)	
VI. Theorie der Abel'schen Functionen.	
(Aus Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 54. 1857.)	
1. Allgemeine Voraussetzungen und Hilfsmittel für die Untersuchung von Functionen unbeschränkt veränderlicher Grössen	81
2. Lehrsätze aus der analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialien	84
3. Bestimmung einer Function einer veränderlichen complexen Grösse durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen	89
4. Theorie der Abel'schen Functionen	93
VII. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse . . .	136
(Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.)	
VIII. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite	145
(Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1860.)	

Cambridge University Press

978-1-108-05935-0 - Bernard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass

Edited by Heinrich Martin Weber and Richard Dedekind

Frontmatter

[More information](#)

Inhalt.	VII
IX. Selbstanzeige der vorstehenden Abhandlung	Seite 165
(Göttinger Nachrichten, 1859. No. 19).	
X. Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides	168
(Aus dem neunten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1861.)	
XI. Ueber das Verschwinden der Theta-Functionen	198
(Aus Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 65. 1865)	

Zweite Abtheilung.

Abhandlungen, die nach Riemann's Tode bereits herausgegeben sind.

XII. Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe	213
(Habilitationsschrift, 1854, aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.)	
Anmerkungen zur vorstehenden Abhandlung	252
XIII. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen	254
(Habilitationsschrift, 1854, aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.)	
XIV. Ein Beitrag zur Electrodynamik. (1858.)	270
Aus Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Bd. CXXXI.)	
XV. Beweis des Satzes, dass eine einwerthige mehr als $2n$ fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist	276
(Auszug aus einem Schreiben Riemann's an Weierstrass vom 26. October 1859. Aus Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 71.)	
XVI. Estratto di una lettera scritta in lingua Italiana il di 21. Gennaio 1864 al Sig. Professore Enrico Betti	280
(Annali di Matematica, Ser. 1. T. VII.)	
XVII. Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung	283
(Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.)	
XVIII. Mechanik des Ohres	316
(Aus Henle und Pfeuffer's Zeitschrift für rationelle Medicin, dritte Reihe. Bd. 29.)	

Dritte Abtheilung.

Nachlass.

XIX. Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation. (1847.)	331
XX. Neue Theorie des Rückstandes in electrischen Bindungsapparaten. (1854.)	345
XXI. Zwei allgemeine Lehrsätze über lineäre Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten. (20. Febr. 1857.)	357
XXII. Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill ^{ma} Academia Parisiensi propositae: „Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène	

Cambridge University Press

978-1-108-05935-0 - Bernard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass

Edited by Heinrich Martin Weber and Richard Dedekind

Frontmatter

[More information](#)

VIII

Inhalt.

	Seite
indéfini pour qu'un système de courbes isothermes, à un instant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température d'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes." (1861.)	370
Anmerkungen zur vorstehenden Abhandlung	384
XXIII. Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita. (1863.)	400
XXIV. Ueber das Potential eines Ringes	407
XXV. Gleichgewicht der Electricität auf Cylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Axen	413
XXVI. Beispiele von Flächen kleinsten Inhalts bei gegebener Begrenzung	417
XXVII. Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen. (1852.)	427
Erläuterungen zu den vorstehenden Fragmenten	438
XXVIII. Fragment aus der Analysis Situs	448
XXIX. Convergenz der p -fach unendlichen Theta-Reihe	452
XXX. Zur Theorie der Abel'schen Functionen für den Fall $p = 3$	456

Anhang.

Fragmente philosophischen Inhalts.	
I. Zur Psychologie und Metaphysik	477
II. Erkenntnistheoretisches	489
III. Naturphilosophie	494
Bernhard Riemann's Lebenslauf	507