Erste Abtheilung.

I.

Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.

(Inauguraldissertation, Göttingen, 1851.)

1.

Denkt man sich unter z eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle möglichen reellen Werthe annehmen kann, so wird, wenn jedem ihrer Werthe ein einziger Werth der unbestimmten Grösse w entspricht, w eine Function von z genannt, und wenn, während z alle zwischen zwei festen Werthen gelegenen Werthe stetig durchläuft, w ebenfalls stetig sich ändert, so heisst diese Function innerhalb dieses Intervalls stetig oder continuirlich. (1)

Diese Definition setzt offenbar zwischen den einzelnen Werthen der Function durchaus kein Gesetz fest, indem, wenn über diese Function für ein bestimmtes Intervall verfügt ist, die Art ihrer Fortsetzung ausserhalb desselben ganz der Willkür überlassen bleibt.

Die Abhängigkeit der Grösse w von z kann durch ein mathematisches Gesetz gegeben sein, so dass durch bestimmte Grössenoperationen zu jedem Werthe von z das ihm entsprechende w gefunden wird. Die Fähigkeit, für alle innerhalb eines gegebenen Intervalls liegenden Werthe von z durch dasselbe Abhängigkeitsgesetz bestimmt zu werden, schrieb man früher nur einer gewissen Gattung von Functionen zu (functiones continuae nach Euler's Sprachgebrauch); neuere Untersuchungen haben indess gezeigt, dass es analytische Ausdrücke giebt, durch welche eine jede stetige Function für ein gegebenes Intervall dargestellt werden kann. Es ist daher einerlei, ob man die Abhängigkeit der Grösse w von der Grösse z als eine willkürlich gegebene oder als eine durch bestimmte Grössenoperationen bedingte definirt. Beide Begriffe sind in Folge der erwähnten Theoreme congruent.

Anders verhält es sich aber, wenn die Veränderlichkeit der Grösse z nicht auf reelle Werthe beschränkt wird, sondern auch complexe von der Form $x + yi$ (wo $i = \sqrt{-1}$) zugelassen werden.

Es seien $x + yi$ und $x + yi + dx + dyi$ zwei unendlich wenig verschiedene Werthe der Grösse z, welchen die Werthe $u + vi$ und $u + vi + du + dvi$ der Grösse w entsprechen. Alsdann wird, wenn die Abhängigkeit der Grösse w von z eine willkürlich angenommene ist, das Verhältniss $\frac{du + dvi}{dx + dyi}$ sich mit den Werthen von dx und dy allgemein zu reden ändern, indem, wenn man $dx + dyi = \varepsilon e^{\varphi i}$ setzt,

$$\begin{aligned}
&\frac{du + dvi}{dx + dyi} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) i \\
&+ \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) i\,\right] \frac{dx - dyi}{dx + dyi} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) i \\
&+ \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) i\,\right] e^{-2\varphi i}
\end{aligned}$$

wird. Auf welche Art aber auch w als Function von z durch Verbindung der einfachen Grössenoperationen bestimmt werden möge, immer wird der Werth des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ von dem besondern Werthe des Differentials dz unabhängig sein*). Offenbar kann also auf diesem Wege nicht jede beliebige Abhängigkeit der complexen Grösse w von der complexen Grösse z ausgedrückt werden.

Das eben hervorgehobene Merkmal aller irgendwie durch Grössenoperationen bestimmbaren Functionen werden wir für die folgende Untersuchung, wo eine solche Function unabhängig von ihrem Ausdrucke betrachtet werden soll, zu Grunde legen, indem wir, ohne jetzt dessen Allgemeingültigkeit und Zulänglichkeit für den Begriff einer durch Grössenoperationen ausdrückbaren Abhängigkeit zu beweisen, von folgender Definition ausgehen:

---

*) Diese Behauptung ist offenbar in allen Fällen gerechtfertigt, wo sich aus dem Ausdrucke von w durch z mittelst der Regeln der Differentiation ein Ausdruck von $\frac{dw}{dz}$ durch z finden lässt; ihre streng allgemeine Gültigkeit bleibt für jetzt dahin gestellt.

Eine veränderliche complexe Grösse w heisst eine Function einer andern veränderlichen complexen Grösse z, wenn sie mit ihr sich so ändert, dass der Werth des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dem Werthe des Differentials dz ist.

2.

Sowohl die Grösse z, als die Grösse w werden als veränderliche Grössen betrachtet, die jeden complexen Werth annehmen können. Die Auffassung einer solchen Veränderlichkeit, welche sich auf ein zusammenhängendes Gebiet von zwei Dimensionen erstreckt, wird wesentlich erleichtert durch eine Anknüpfung an räumliche Anschauungen.

Man denke sich jeden Werth $x + yi$ der Grösse z repräsentirt durch einen Punkt O der Ebene A, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, jeden Werth $u + vi$ der Grösse w durch einen Punkt Q der Ebene B, dessen rechtwinklige Coordinaten u, v sind. Eine jede Abhängigkeit der Grösse w von z wird sich dann darstellen als eine Abhängigkeit der Lage des Punktes Q von der des Punktes O. Entspricht jedem Werthe von z ein bestimmter mit z stetig sich ändernder Werth von w, mit andern Worten, sind u und v stetige Functionen von x, y, so wird jedem Punkte der Ebene A ein Punkt der Ebene B, jeder Linie, allgemein zu reden, eine Linie, jedem zusammenhängenden Flächenstücke ein zusammenhängendes Flächenstück entsprechen. Man wird sich also diese Abhängigkeit der Grösse w von z vorstellen können als eine Abbildung der Ebene A auf der Ebene B.

3.

Es soll nun untersucht werden, welche Eigenschaft diese Abbildung erhält, wenn w eine Function der complexen Grösse z, d. h. wenn $\frac{dw}{dz}$ von dz unabhängig ist.

Wir bezeichnen durch o einen unbestimmten Punkt der Ebene A in der Nähe von O, sein Bild in der Ebene B durch q, ferner durch $x + yi + dx + dyi$ und $u + vi + du + dvi$ die Werthe der Grössen z und w in diesen Punkten. Es können dann dx, dy und du, dv als rechtwinklige Coordinaten der Punkte o und q in Bezug auf die Punkte O und Q als Anfangspunkte angesehen werden, und wenn man $dx + dyi = \varepsilon e^{\varphi i}$ und $du + dvi = \eta e^{\psi i}$ setzt, so werden die Grössen ε, φ, η, ψ Polarcoordinaten dieser Punkte für dieselben

Anfangspunkte sein. Sind nun o' und o'' irgend zwei bestimmte Lagen des Punktes o in unendlicher Nähe von O, und drückt man die von ihnen abhängigen Bedeutungen der übrigen Zeichen durch entsprechende Indices aus, so giebt die Voraussetzung

$$\frac{du' + dv' i}{dx' + dy' i} = \frac{du'' + dv'' i}{dx'' + dy'' i}$$

und folglich

$$\frac{du' + dv' i}{du'' + dv'' i} = \frac{\eta'}{\eta''} e^{(\psi' - \psi'') i} = \frac{dx' + dy' i}{dx'' + dy'' i} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} e^{(\varphi' - \varphi'') i},$$

woraus $\frac{\eta'}{\eta''} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ und $\psi' - \psi'' = \varphi' - \varphi''$, d. h. in den Dreiecken $o' O o''$ und $q' Q q''$ sind die Winkel $o' O o''$ und $q' Q q''$ gleich und die sie einschliessenden Seiten einander proportional.

Es findet also zwischen zwei einander entsprechenden unendlich kleinen Dreiecken und folglich allgemein zwischen den kleinsten Theilen der Ebene A und ihres Bildes auf der Ebene B Aehnlichkeit Statt. Eine Ausnahme von diesem Satze tritt nur in den besonderen Fällen ein, wenn die einander entsprechenden Aenderungen der Grössen z und w nicht in einem endlichen Verhältnisse zu einander stehen, was bei Herleitung desselben stillschweigend vorausgesetzt ist*).

4.

Bringt man den Differentialquotienten $\frac{du + dv i}{dx + dy i}$ in die Form

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i\right) dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} i\right) dy i}{dx + dy i},$$

so erhellt, dass er und zwar nur dann für je zwei Werthe von dx und dy denselben Werth haben wird, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

ist. Diese Bedingungen sind also hinreichend und nothwendig, damit $w = u + vi$ eine Function von $z = x + yi$ sei. Für die einzelnen Glieder dieser Function fliessen aus ihnen die folgenden:

---

*) Ueber diesen Gegenstand sehe man:

„Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, von C. F. Gauss. (Als Beantwortung der von der königlichen Societät der Wissenschaften in Copenhagen für 1822 aufgegebenen Preisfrage", abgedruckt in: „Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von Schumacher. Drittes Heft. Altona. 1825.") (Gauss Werke Bd. IV, p. 189.)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

welche für die Untersuchung der Eigenschaften, die Einem Gliede einer solchen Function einzeln betrachtet zukommen, die Grundlage bilden. Wir werden den Beweis für die wichtigsten dieser Eigenschaften einer eingehenderen Betrachtung der vollständigen Function voraufgehen lassen, zuvor aber noch einige Punkte, welche allgemeineren Gebieten angehören, erörtern und festlegen, um uns den Boden für jene Untersuchungen zu ebenen.

* * *

5.

Für die folgenden Betrachtungen beschränken wir die Veränderlichkeit der Grössen x, y auf ein endliches Gebiet, indem wir als Ort des Punktes O nicht mehr die Ebene A selbst, sondern eine über dieselbe ausgebreitete Fläche T betrachten. Wir wählen diese Einkleidung, bei der es unanstössig sein wird, von auf einander liegenden Flächen zu reden, um die Möglichkeit offen zu lassen, dass der Ort des Punktes O über denselben Theil der Ebene sich mehrfach erstrecke, setzen jedoch für einen solchen Fall voraus, dass die auf einander liegenden Flächentheile nicht längs einer Linie zusammenhängen, so dass eine Umfaltung der Fläche, oder eine Spaltung in auf einander liegende Theile nicht vorkommt.

Die Anzahl der in jedem Theile der Ebene auf einander liegenden Flächentheile ist alsdann vollkommen bestimmt, wenn die Begrenzung der Lage und dem Sinne nach (d. h. ihre innere und äussere Seite) gegeben ist; ihr Verlauf kann sich jedoch noch verschieden gestalten.

In der That, ziehen wir durch den von der Fläche bedeckten Theil der Ebene eine beliebige Linie l, so ändert sich die Anzahl der über einander liegenden Flächentheile nur beim Ueberschreiten der Begrenzung, und zwar beim Uebertritt von Aussen nach Innen um $+1$, im entgegengesetzten Falle um -1, und ist also überall bestimmt. Längs des Ufers dieser Linie setzt sich nun jeder angrenzende Flächentheil auf ganz bestimmte Art fort, so lange die Linie die Begrenzung nicht trifft, da eine Unbestimmtheit jedenfalls nur in einem einzelnen Punkte und also entweder in einem Punkte der Linie selbst oder in einer endlichen Entfernung von derselben Statt hat; wir können daher, wenn wir unsere Betrachtung auf einen im Innern der Fläche verlaufenden Theil der Linie l und zu beiden Seiten auf einen hinreichend kleinen Flächenstreifen beschränken, von bestimmten angrenzenden Flächentheilen reden, deren Anzahl auf jeder Seite gleich ist, und die wir, indem wir der Linie eine bestimmte Richtung beilegen, auf der Linken mit $a_1, a_2, \ldots a_n$, auf der Rechten mit $a_1', a_2', \ldots a'_n$, bezeichnen. Jeder Flächentheil a wird sich dann in einen der Flächentheile a' fortsetzen; dieser wird zwar im Allgemeinen für den ganzen Lauf der Linie l derselbe sein, kann sich jedoch für besondere Lagen von l in einem ihrer Punkte ändern. Nehmen wir an, dass oberhalb eines solchen Punktes σ (d. h. längs des vorhergehenden Theils von l) mit den Flächentheilen $a'_1, a'_2, \ldots a'_n$ der Reihe nach die Flächentheile $a_1, a_2, \ldots a_n$ verbunden seien, unterhalb desselben aber die Flächentheile $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots a_{\alpha_n}$, wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ nur in der Anordnung von $1, 2, \ldots n$ verschieden sind, so wird ein oberhalb σ von a_1 in a'_1 eintretender Punkt, wenn er unterhalb σ auf die linke Seite zurücktritt, in den Flächentheil a_{α_1} gelangen, und wenn er den Punkt σ von der Linken zur Rechten umkreiset, wird der Index des Flächentheils, in welchem er sich befindet, der Reihe nach die Zahlen

$$1, \alpha_1, \alpha_{\alpha_1}, \ldots \mu, \alpha_\mu, \ldots$$

durchlaufen. In dieser Reihe sind, so lange das Glied 1 nicht wiederkehrt, nothwendig alle Glieder von einander verschieden, weil einem beliebigen mittlern Gliede α_μ nothwendig μ und nach einander alle früheren Glieder bis 1 in unmittelbarer Folge vorhergehen; wenn aber nach einer Anzahl von Gliedern, die offenbar kleiner als n sein muss und $= m$ sei, das Glied 1 wiederkehrt, so müssen die übrigen Glieder in derselben Ordnung folgen. Der um σ sich bewegende Punkt kommt alsdann nach je m Umläufen in denselben Flächentheil zurück und ist auf m der auf einander liegenden Flächentheile eingeschränkt, welche sich über σ zu einem einzigen Punkte vereinigen. Wir nennen diesen Punkt einen Windungspunkt $m - 1$ster Ordnung der Fläche T. Durch Anwendung desselben Verfahrens auf die übrigen $n - m$ Flächentheile werden diese, wenn sie nicht gesondert verlaufen, in Systeme von $m_1, m_2, \ldots$ Flächentheilen zerfallen, in welchem Falle auch noch Windungspunkte $m_1 - 1$ster, $m_2 - 1$ster Ordnung in dem Punkte σ liegen.

Wenn die Lage und der Sinn der Begrenzung von T und die Lage ihrer Windungspunkte gegeben ist, so ist T entweder vollkommen bestimmt oder doch auf eine endliche Anzahl verschiedener Gestalten beschränkt; Letzteres, in so fern sich diese Bestimmungsstücke auf verschiedene der auf einander liegenden Flächentheile beziehen können.

Eine veränderliche Grösse, die für jeden Punkt O der Fläche T, allgemein zu reden, d. h. ohne eine Ausnahme in einzelnen Linien und Punkten*) auszuschliessen, Einen bestimmten mit der Lage desselben stetig sich ändernden Werth annimmt, kann offenbar als eine Function von x, y angesehen werden, und überall, wo in der Folge von Functionen von x, y die Rede sein wird, werden wir den Begriff derselben auf diese Art festlegen.

Ehe wir uns jedoch zur Betrachtung solcher Functionen wenden, schalten wir noch einige Erörterungen über den Zusammenhang einer Fläche ein. Wir beschränken uns dabei auf solche Flächen, die sich nicht längs einer Linie spalten.

6.

Wir betrachten zwei Flächentheile als zusammenhängend oder Einem Stücke angehörig, wenn sich von einem Punkte des einen durch das Innere der Fläche eine Linie nach einem Punkte des andern ziehen lässt, als getrennt, wenn diese Möglichkeit nicht Statt findet.

Die Untersuchung des Zusammenhangs einer Fläche beruht auf ihrer Zerlegung durch Querschnitte, d. h. Linien, welche von einem Begrenzungspunkte das Innere einfach — keinen Punkt mehrfach — bis zu einem Begrenzungspunkte durchschneiden. Letzterer kann auch in dem zur Begrenzung hinzugekommenen Theile, also in einem frühern Punkte des Querschnitts, liegen.

Eine zusammenhängende Fläche heisst, wenn sie durch jeden Querschnitt in Stücke zerfällt, eine einfach zusammenhängende, andernfalls eine mehrfach zusammenhängende.

Lehrsatz I. Eine einfach zusammenhängende Fläche A zerfällt durch jeden Querschnitt ab in zwei einfach zusammenhängende Stücke.

Gesetzt, eins dieser Stücke würde durch einen Querschnitt cd nicht zerstückt, so erhielte man offenbar, je nachdem keiner seiner Endpunkte oder der Endpunkt c oder beide Endpunkte in ab fielen, durch Herstellung der Verbindung längs der ganzen Linie ab oder längs des Theils cb oder des Theils cd derselben eine zusammen-

*) Diese Beschränkung ist zwar nicht durch den Begriff einer Function an sich geboten, aber um Infinitesimalrechnung auf sie anwenden zu können erforderlich: eine Function, die in allen Punkten einer Fläche unstetig ist, wie z. B. eine Function, die für ein commensurables x und ein commensurables y den Werth 1, sonst aber den Werth 2 hat, kann weder einer Differentiation, noch einer Integration, also (unmittelbar) der Infinitesimalrechnung überhaupt nicht unterworfen werden. Die für die Fläche T hier willkürlich gemachte Beschränkung wird sich später (Art. 15.) rechtfertigen.

hängende Fläche, welche durch einen Querschnitt aus A entstände, gegen die Vorraussetzung.

Lehrsatz II. Wenn eine Fläche T durch n_1*) Querschnitte q_1 in ein System T_1 von m_1 einfach zusammenhängenden Flächenstücken und durch n_2 Querschnitte q_2 in ein System T_2 von m_2 Flächenstücken zerfällt, so kann $n_2 - m_2$ nicht $> n_1 - m_1$ sein.

Jede Linie q_2 bildet, wenn sie nicht ganz in das Querschnittsystem q_1 fällt, zugleich einen oder mehrere Querschnitte q_2' der Fläche T_1. Als Endpunkte der Querschnitte q_2' sind anzusehen:

1) die $2n_2$ Endpunkte der Querschnitte q_2, ausgenommen, wenn ihre Enden mit einem Theil des Liniensystems q_1 zusammenfallen,
2) jeder mittlere Punkt eines Querschnitts q_2, in welchem er in einen mittlern Punkt einer Linie q_1 eintritt, ausgenommen, wenn er sich schon in einer andern Linie q_1 befindet, d. h. wenn ein Ende eines Querschnitts q_1 mit ihm zusammenfällt.

Bezeichnet nun μ, wie oft Linien beider Systeme während ihres Laufes zusammentreffen oder auseinandergehen (wo also ein einzelner gemeinsamer Punkt doppelt zu rechnen ist), ν_1, wie oft ein Endstück der q_1 mit einem mittlern Stücke der q_2, ν_2, wie oft ein Endstück der q_2 mit einem mittlern Stücke der q_1, endlich ν_3, wie oft ein Endstück der q_1 mit einem Endstücke der q_2 zusammenfällt, so liefert Nr. 1 $2n_2 - \nu_2 - \nu_3$, Nr. 2 $\mu - \nu_1$ Endpunkte der Querschnitte q'_2; beide Fälle zusammengenommen aber umfassen sämmtliche Endpunkte und jeden nur einmal, und die Anzahl dieser Querschnitte ist daher $\frac{2n_2 - \nu_2 - \nu_3 + \mu - \nu_1}{2} = n_2 + s$. Durch ganz ähnliche Schlüsse ergiebt sich die Anzahl der Querschnitte q'_1 der Fläche T_2, welche durch die Linien q_1 gebildet werden, $= \frac{2n_1 - \nu_1 - \nu_3 + \mu - \nu_2}{2}$, also $= n_1 + s$. Die Fläche T_1 wird nun offenbar durch die $n_2 + s$ Querschnitte q'_2 in dieselbe Fläche verwandelt, in welche T_2 durch die $n_1 + s$ Querschnitte q'_1 zerfällt wird. Es besteht aber T_1 aus m_1 einfach zusammenhängenden Stücken und zerfällt daher nach Satz I. durch $n_2 + s$ Querschnitte in $m_1 + n_2 + s$ Flächenstücke; folglich müsste, wäre $m_2 < m_1 + n_2 - n_1$, die Zahl der Flächenstücke T_2 durch $n_1 + s$ Querschnitte um mehr als $n_1 + s$ vermehrt werden, was ungereimt ist.

Zufolge dieses Lehrsatzes ist, wenn die Anzahl der Querschnitte unbestimmt durch n, die Anzahl der Stücke durch m bezeichnet wird,

*) Unter einer Zerlegung durch mehrere Querschnitte ist stets eine successive zu verstehen, d. h. eine solche, wo die durch einen Querschnitt entstandene Fläche durch einen neuen Querschnitt weiter zerlegt wird.