Vorlesungen über Dynamik.

Erste Vorlesung.

Einleitung.

Diese Vorlesungen werden sich mit den Vortheilen beschäftigen, welche man bei der Integration der Differentialgleichungen der Bewegung aus der besonderen Form dieser Gleichungen ziehen kann. In der „Mécanique analytique“ findet man Alles, was sich auf die Aufgabe bezieht, die Differentialgleichungen aufzustellen und umzuformen, allein für ihre Integration ist sehr wenig geschehen. Die in Rede stehende Aufgabe ist kaum gestellt; das Einzige, was man dahin rechnen kann, ist die Methode der Variation der Constanten, eine Näherungsmethode, welche auf der besonderen Form der in der Mechanik vorkommenden Differentialgleichungen beruht.

Unter der grossen Menge von Aufgaben, welche die Mechanik darbietet, wollen wir nur diejenigen betrachten, welche sich auf ein System von n materiellen Punkten beziehen, d. h. von n Körpern, deren Ausdehnung man vernachlässigen kann und deren Masse man im Schwerpunkt befindlich annimmt. Wir wollen ferner nur solche Probleme berücksichtigen, bei welchen die Bewegung allein von der Configuration der Punkte und nicht von ihrer Geschwindigkeit abhängt. Hierdurch sind also namentlich alle Probleme ausgeschlossen, bei welchen der Widerstand in Rechnung zu ziehen ist.

Wir werden zuerst die Differentialgleichungen für die Bewegung eines solchen Systems aufstellen und dann die Principe durchgehen, welche für dasselbe gelten. Diese Principe sind:

1. Das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts.
2. Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.
3. Das Princip der Erhaltung der Flächenräume.
4. Das Princip der kleinsten Wirkung oder, wie es besser heissen sollte, des kleinsten Kraftaufwandes.

Cambridge University Press
978-1-108-05931-2 - C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke: Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften: Supplement
Edited by Eduard Lottner and Alfred Clebsch
Excerpt
More information

Die drei ersten dieser Principe geben Integrale des aufgestellten Systems von Differentialgleichungen; das letzte Princip giebt kein Integral, sondern nur eine symbolische Formel, in welche das System von Differentialgleichungen sich zusammenfassen lässt. Dasselbe ist aber darum nicht minder wichtig, *Lagrange* hat sogar ursprünglich aus ihm alle seine Resultate in der Mechanik hergeleitet. Später, als er dieselben streng begründen wollte, verliess er das Princip der kleinsten Wirkung und nahm (zuerst in der von der Pariser Akademie gekrönten Preisschrift über die Libration des Mondes, dann aber vorzüglich in der „Mécanique analytique") das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zur Basis seiner Entwickelungen. So wurde also das Princip der kleinsten Wirkung, welches die Mutter aller neuen Resultate gewesen war, zu geringfügig behandelt.

Ich habe ein neues Princip der Mechanik hinzugefügt, welches darin mit den Principen der Erhaltung der lebendigen Kraft und dem der Flächenräume übereinstimmt, dass es ein Integral giebt, aber im Uebrigen ganz anderer Natur ist. Erstens ist es allgemeiner als jene Principe; denn es gilt, sobald die Differentialgleichungen nur die Coordinaten enthalten; ferner: während jene Principe erste Integrale der Form geben: Function der Coordinaten und ihrer Differentialquotienten gleich einer Constanten, Integrale also, aus deren Differentiation Gleichungen fliessen, die durch Benutzung der gegebenen Differentialgleichungen identisch Null werden, liefert das neue Princip bei Voraussetzung der vorhergehenden Integrale das letzte. Nach diesem Principe kann man nämlich unter der Annahme, dass ein Problem der Mechanik auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen zurückgeführt ist, den Multiplicator derselben allgemein angeben.

In Fällen, wo die übrigen Principe ein Problem auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen, wird also durch das neue Princip die Aufgabe vollständig gelöst. Hierher gehört das Problem der Anziehung eines Punktes nach einem festen Centrum, wobei das Gesetz der Anziehung beliebig ist, ferner das der Anziehung nach zwei festen Centren, vorausgesetzt, dass die Anziehung nach dem *Newton*schen Gesetz stattfindet, und die Rotation eines von keinen äusseren Kräften sollicitirten Körpers um einen Punkt. Bei der Anziehung nach zwei festen Centren ist freilich ausser der Anwendung der älteren Principe ein von *Euler* durch besondere Kunstgriffe gefundenes Integral nöthig, durch welches erst das Problem auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen zurückgeführt wird; aber diese Gleichung ist äusserst complicirt, und ihre Integration ist eines der grössten Meisterwerke *Eulers*. Durch das neue Princip ergiebt sich ihr Multiplicator von selbst.

Besonders hervorzuheben ist diejenige Classe von Problemen, für welche zugleich das Princip der lebendigen Kraft und das Princip der kleinsten Wirkung gilt. *Hamilton* hat nämlich bemerkt, dass man in diesem Falle die Aufgabe auf eine nicht lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen kann. Hat man eine vollständige Lösung derselben gefunden, so ergeben sich sofort alle Integralgleichungen. Die durch die partielle Differentialgleichung definirte Function nennt *Hamilton* die charakteristische Function.

Hamilton hat den schönen Zusammenhang, den er gefunden hat, etwas unzugänglich gemacht und verdunkelt, und zwar dadurch, dass er seine charakteristische Function noch zugleich von einer zweiten partiellen Differentialgleichung abhängen lässt. Die Hinzufügung dieser Bestimmung macht die ganze Entdeckung unnöthig complicirt, da eine genauere Untersuchung zeigt, dass die zweite partielle Differentialgleichung vollkommen überflüssig ist.

Wir wollen zur Unterscheidung folgende Bezeichnungen einführen: Die Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichungen wollen wir Integrale oder Integralgleichungen nennen, die Integrale der partiellen Differentialgleichung dagegen Lösungen. Ferner wollen wir bei einem System von Differentialgleichungen Integrale und Integralgleichungen unterscheiden. Integrale seien diejenigen ersten Integrale, welche die Form haben: Function der Coordinaten und ihrer Differentialquotienten gleich einer Constanten, und deren Differentialquotient mit Benutzung des gegebenen Systems von Differentialgleichungen identisch gleich Null wird, ohne dass man andere Integrale zu Hülfe ruft; Integralgleichungen heissen alle übrigen Integrale. In diesem Sinne geben also die Principe der lebendigen Kraft und der Flächenräume Integrale und nicht Integralgleichungen.

Durch die *Hamilton*sche Entdeckung hat das System der Integralgleichungen der mechanischen Probleme eine sehr merkwürdige Form erhalten. Wenn man nämlich die charakteristische Function nach den willkürlichen Constanten, welche sie enthält, differentiirt, so giebt dies die Integralgleichungen des gegebenen Systems von Differentialgleichungen. Dies ist analog dem Satz von *Lagrange*, wonach sich die Differentialgleichungen eines Problems, für welches das Princip der kleinsten Wirkung gilt, als partielle Differentialquotienten einer einzigen Grösse darstellen lassen. Obgleich nun *Hamilton* die in Rede stehende

Form der Integralgleichungen, welche sie vermittelst der charakteristischen Function annehmen, aufgestellt hat, so hat er doch nichts zur Auffindung der letzteren gethan. Hiermit werden wir uns beschäftigen und mit Hülfe der gewonnenen Resultate die Anziehung nach einem festen Centrum, nach zwei festen Centren und die Bewegung eines der Schwere nicht unterworfenen Punktes auf dem dreiaxigen Ellipsoid (deren Bestimmung mit der Auffindung der kürzesten Linie auf dem Ellipsoid übereinkommt) behandeln.

Der von *Hamilton* entdeckte Zusammenhang giebt auch neue Aufschlüsse über die Methode der Variation der Constanten. Diese Methode beruht auf Folgendem: Die Integrale eines Systems von Differentialgleichungen der Dynamik enthalten eine gewisse Anzahl willkürlicher Constanten, deren Werthe in jedem besonderen Falle durch die Anfangspositionen und Anfangsgeschwindigkeiten der sich bewegenden Punkte bestimmt werden. Bekommen nun die letzteren während der Bewegung Stösse, so ändern sich dadurch nur die Werthe der Constanten, die Form der Integralgleichungen bleibt dieselbe. Bewegt sich z. B. ein Planet in einer Ellipse um die Sonne, und bekommt er während der Bewegung einen Stoss, so wird er sich nun in einer neuen Ellipse oder vielleicht auch in einer Hyperbel, jedenfalls in einem Kegelschnitt bewegen, die Form der Gleichung bleibt dieselbe. Treten nun solche Stösse nicht momentan auf, sondern werden sie continuirlich fortgesetzt, so kann man die Sache so ansehen, als ob die Constanten sich continuirlich änderten, und zwar so, dass diese Aenderungen die Wirkung der störenden Kräfte genau darstellen. Diese Theorie der Variation der Constanten wird in dem Verlauf unserer Untersuchung in einem neuen Lichte erscheinen.

Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft umfasst eine grosse Klasse von Problemen, unter welche namentlich das Problem der drei Körper gehört, oder allgemeiner das Problem der Bewegung von n Körpern, welche sich gegenseitig anziehen.

Jemehr man in die Natur der Kräfte eindringt, desto mehr reducirt man Alles auf gegenseitige Anziehungen und Abstossungen, desto wichtiger wird also das Problem, die Bewegung von n Körpern zu bestimmen, welche sich gegenseitig anziehen. Dieses Problem gehört in die Kategorie derjenigen, auf welche unsere Theorie anzuwenden ist, d. h. welche sich auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung zurückführen lassen. Man erkennt hieraus die

Nothwendigkeit, die partiellen Differentialgleichungen zu studiren; aber seit 30 Jahren*) hat man sich nur mit den linearen partiellen Differentialgleichungen beschäftigt, während für die nicht linearen nichts geschehen ist. Für drei Variablen hat bereits *Lagrange* das Problem absolvirt; für mehr Variablen hat *Pfaff* eine zwar verdienstliche aber unvollkommene Arbeit geliefert. Nach *Pfaff* muss man zur Lösung der partiellen Differentialgleichung zunächst ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen integriren. Nach Integration derselben hat man ein neues System von Differentialgleichungen aufzustellen, welches zwei Variablen weniger enthält, dieses wiederum zu integriren u. s. w., und so gelangt man endlich zur Integration der partiellen Differentialgleichung. Hiernach hatte also *Hamilton* durch seine Zurückführung der Differentialgleichung der Bewegung auf eine partielle Differentialgleichung das Problem auf ein schwierigeres zurückgeführt; denn nach *Pfaff* erfordert die Integration einer partiellen Differentialgleichung die Integration einer Reihe von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, während das mechanische Problem nur die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erfordert. Es war daher hier die umgekehrte Zurückführung von grösserer Wichtigkeit, wonach eine partielle Differentialgleichung sich auf ein einziges System von Differentialgleichungen zurückführen lässt. Das erste *Pfaff*sche System stimmt nämlich mit dem, auf welches die Mechanik führt, überein, und es lässt sich nachweisen, dass die übrigen Systeme alsdann entbehrt werden können. So wie in diesem Falle kehrt sich die Zurückführung eines Problems auf ein anderes sehr häufig um, indem der Fortschritt der Wissenschaft das Erste zum Zweiten macht und umgekehrt. Das Wichtige in solchen Zurückführungen ist der Zusammenhang, der zwischen zwei Problemen nachgewiesen wird. Der in Rede stehende Zusammenhang lässt erkennen, dass jeder Fortschritt in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen auch einen Fortschritt in der Mechanik herbeiführen muss.

Ein tieferes Studium der Differentialgleichungen der Mechanik zeigt, dass die Anzahl der Integrationen sich immer auf die Hälfte zurückführen lässt, während die andere Hälfte durch Quadraturen ersetzt wird. Es giebt ein merkwürdiges Theorem, welches zeigt, dass ein qualitativer Unterschied zwischen den Integralen stattfindet. Während nämlich einige Integrale nicht mehr Bedeutung haben als Quadraturen, giebt es andere, welche für alle übrigen zu-

*) Diese Vorlesungen wurden im Winter 1842—43 gehalten. *C.*

sammengenommen gelten können. Dies Theorem lässt sich folgendermassen aussprechen: *Kennt man ausser dem durch das Princip der lebendigen Kraft gegebenen Integral noch zwei Integrale der dynamischen Gleichungen, so kann man aus diesen beiden ein drittes finden.* Ein Beispiel hiervon sind die sogenannten Flächensätze in Bezug auf die drei Coordinatenebenen; gelten von diesen zwei. so lässt sich der dritte daraus ableiten.

Hat man nach dem angeführten allgemeinen Satze aus zwei Integralen ein drittes gefunden, so lässt sich hieraus und aus einem der früheren ein viertes finden, u. s. w. bis man auf eines der gegebenen zurückkommt. Es giebt Integrale, welche bei dieser Operation das ganze System der Integralgleichungen erschöpfen, während bei anderen sich der Cyclus früher schliesst. Dieses Fundamentaltheorem ist schon seit 30 Jahren zugleich gefunden und verborgen. Es rührt nämlich von *Poisson* her und war auch *Lagrange* bekannt, der in dem erst nach seinem Tode erschienenen zweiten Theil der „Mécanique analytique" dasselbe als Hülfssatz brauchte*). Aber dieser Satz ist immer in einer ganz anderen Bedeutung genommen worden; er sollte nur zeigen, dass in einer Entwickelung gewisse Glieder unabhängig von der Zeit seien, und es war keine geringe Schwierigkeit, in demselben seine heutige Bedeutung zu sehen. In diesem Satze liegt zugleich das Fundament für die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Zweite Vorlesung.

Die Differentialgleichungen der Bewegung. Symbolische Formel für dieselben.
Die Kräftefunction.

Wir wollen zunächst ein freies System von materiellen Punkten betrachten; wir nennen es ein System, weil wir annehmen, dass die Punkte den äusseren Kräften nicht unabhängig von einander Folge leisten, in welchem Falle man jeden Punkt für sich betrachten könnte, sondern dass sie gegenseitig auf einander einwirken, man also nicht einen ohne die anderen betrachten kann. Dies System sei ferner ein freies, d. h. ein solches, in welchem die Punkte den Einwirkungen der Kräfte ohne Hinderniss folgen. Irgend einer der Punkte des

*) Méc. anal. Sect. VII. 60, 61. (Band II. p. 70 folgg. der dritten Ausgabe.)

Systems habe die Masse m, die rechtwinkligen Coordinaten desselben zur Zeit t seien x, y, z, und die Componenten der auf ihn wirkenden Kraft X, Y, Z: dann hat man bekanntlich folgende Gleichungen der Bewegung:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

und ähnliche Gleichungen giebt es für alle Punkte des Systems. Die Grössen X, Y, Z hängen von den Coordinaten aller n Punkte ab und können auch ihre Differentialquotienten nach der Zeit t enthalten, was namentlich immer stattfindet, sobald der Widerstand in Rechnung zu ziehen ist.

Die obigen Differentialgleichungen der Bewegung können in eine äusserst vortheilhafte symbolische Form dadurch gebracht werden, dass man jede derselben, nachdem man die rechte Seite auf Null gebracht hat, mit einem willkürlichen Factor multiplicirt und die Producte addirt. Man erhält so die Gleichung:

$$\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\lambda+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\mu+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\nu+ \text{u. s. w.} = 0,$$

wo sich das u. s. w. auf ähnliche Glieder bezieht, welche von den übrigen Punkten des Systems herrühren. Indem man nun fordert, dass diese Gleichung für alle Werthe der Grössen $\lambda, \mu, \nu \dots$ gelte, repräsentirt dieselbe das ganze obige System von Differentialgleichungen. Der Uebersichtlichkeit wegen wollen wir die Factoren $\lambda, \mu, \nu \dots$ mit $\delta x, \delta y, \delta z$ bezeichnen, wo x, y, z rein als Indices anzusehen sind. Unsere symbolische Gleichung wird dadurch

$$\Sigma\left\{\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right\} = 0,$$

wo sich die Summe auf alle Punkte des Systems bezieht. Diese Gleichung muss also für alle Werthe von $\delta x, \delta y, \delta z, \dots$ bestehen. Die symbolische Bezeichnung in derselben ist sehr wichtig; es tritt nämlich häufig der Fall ein, dass ein Symbol als Grösse betrachtet und damit gerechnet und operirt wird, wie es überhaupt mit Grössen geschieht; hiervon werden wir später ein Beispiel haben.

Eine besondere Behandlung lässt der Fall zu, wo nur Attractionen nach festen Centren oder Attractionen der Punkte unter sich betrachtet werden. In diesem Falle lassen sich die Componenten $X, Y, Z, \dots$ als partielle Differentialquotienten ein und derselben Grösse darstellen. *Lagrange* hat die wichtige Bemerkung gemacht, dass wenn man einen festen Punkt mit einem beweglichen verbindet, die Cosinus der Winkel, welche diese Linie mit den drei Coordinatenaxen bildet, die partiellen Differentialquotienten einer Grösse, der Entfernung der beiden Punkte, sind. Der feste Punkt habe die Coordinaten a, b, c, der bewegliche die Coordinaten x, y, z, der beide Punkte verbindende Radiusvector sei r; man ziehe durch den festen Punkt (a, b, c) drei Gerade parallel den Coordinatenaxen und zwar nach dem positiven Ende derselben gerichtet; die Winkel, welche der Radiusvector r mit diesen Geraden macht, seien α, β, γ. Man hat dann folgende Gleichungen:

$$r^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2;$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r} = \cos\alpha; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r} = \cos\beta; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-c}{r} = \cos\gamma\text{*)}.$$

Ist nun R die Kraft, mit welcher der Punkt (x, y, z) von dem Punkt (a, b, c) angezogen wird, so sind die Componenten, welche auf den Punkt (x, y, z) nach der positiven Seite der Coordinaten hin wirken:

$$= -R\frac{\partial r}{\partial x}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial y}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial z},$$

oder wenn wir

$$\int R\,dr = P$$

setzen:

$$= -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad -\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Die Componenten sind also die partiellen Differentialquotienten einer Grösse $-P$. Dies findet auch bei der gegenseitigen Anziehung zweier Punkte, p und p_1, statt. Ihre Coordinaten seien x, y, z und x_1, y_1, z_1, ihre Entfernung r, also

$$r^2 = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2,$$

R sei die Kraft der Anziehung zwischen p und p_1; dann sind die auf p wirkenden Componenten:

$$-R\frac{\partial r}{\partial x}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial y}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial z}$$

und die auf p_1 wirkenden Componenten:

$$-R\frac{\partial r}{\partial x_1}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial y_1}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial z_1},$$

welche respective gleich und entgegengesetzt sind, da

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-x_1}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{x-x_1}{r},$$

*) Es wird hier wie im Folgenden immer für die partiellen Differentiationen das Zeichen ∂, für die vollständigen das Zeichen d gebraucht.

also:

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{\partial r}{\partial x}, \text{ und ebenso: } \frac{\partial r}{\partial y_1} = -\frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial r}{\partial z_1} = -\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Führt man nun wieder

$$P = \int R\, dr$$

ein, so sind die auf p wirkenden Componenten

$$-\frac{\partial P}{\partial x}, \quad -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad -\frac{\partial P}{\partial z}$$

und die auf p_1 wirkenden Componenten

$$-\frac{\partial P}{\partial x_1}, \quad -\frac{\partial P}{\partial y_1}, \quad -\frac{\partial P}{\partial z_1}.$$

Betrachten wir jetzt n Punkte, welche sich gegenseitig anziehen. Ihre Massen seien $m_1, m_2, \ldots m_n$, ihre Coordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n$, die Entfernung von m_1 und m_2 werde mit $r_{1,2}$ bezeichnet, das Integral derjenigen Function von $r_{1,2}$, welche die zwischen beiden Punkten wirkende Anziehung ausdrückt, mit $P_{1,2}$, worin man sich das Product der Massen m_1, m_2 als Factor eintretend zu denken hat. $\left(\text{Für das } \textit{Newton}\text{sche Gesetz z. B. wird } P_{1,2} = -\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}}.\right)$ Dies vorausgesetzt, ist die Componente der Kraft, welche auf den Punkt m_1 wirkt, in der Richtung der x-Coordinaten:

$$= -\frac{\partial(P_{1,2}+P_{1,3}+\cdots+P_{1,n})}{\partial x_1}$$

und analog für die beiden anderen Componenten. Daher hat man für den Punkt m_1

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{\partial(P_{1,2}+P_{1,3}+\cdots+P_{1,n})}{\partial x_1},$$
$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{\partial(P_{1,2}+P_{1,3}+\cdots+P_{1,n})}{\partial y_1},$$
$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\frac{\partial(P_{1,2}+P_{1,3}+\cdots+P_{1,n})}{\partial z_1}.$$

Aehnliche Gleichungen giebt es für die übrigen Punkte des Systems; für den Punkt m_2 z. B. ist die in Klammern eingeschlossene Grösse, deren Differentialquotient genommen wird, gleich $P_{2,1}+P_{2,3}+\cdots+P_{2,n}$. Die Grössen P haben aber die Eigenschaft, dass jede derselben nur von den Coordinaten der beiden Punkte abhängt, deren Indices angehängt sind; daher verschwinden bei der Differentiation nach x_1, y_1 oder z_1 die Differentialquotienten von $P_{2,3}, P_{2,4}, \ldots P_{2,n}, P_{3,4}, \ldots P_{n-1,n}$,

Cambridge University Press
978-1-108-05931-2 - C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke: Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften: Supplement
Edited by Eduard Lottner and Alfred Clebsch
Excerpt
More information

und es bleiben nur die Differentialquotienten von $P_{1,2}$, $P_{1,3}$, ... $P_{1,n}$ übrig. Es werden also die auf den ersten Punkt bezüglichen Differentialgleichungen ganz ungeändert bleiben, wenn man auf der rechten Seite in der Klammer zu der Summe $P_{1,2}+P_{1,3}+\cdots+P_{1,n}$ noch die Summe aller übrigen P hinzufügt. Eine ähnliche Aenderung kann man bei den anderen Gleichungen in der in Klammern eingeschlossenen Grösse anbringen und erhält dann in den Differentialgleichungen des ganzen Systems die Differentialquotienten einer und derselben Grösse:

$$U = -(P_{1,2}+P_{1,3}+\cdots+P_{1,n}+P_{2,3}+\cdots+P_{2,n}+\cdots+P_{n-1,n}).$$

Wir haben auf diese Weise für irgend einen Punkt des Systems die Gleichungen

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Diese Bemerkung, dass man in allen Gleichungen eine und dieselbe Grösse U einführen kann, scheint sehr einfach, und dennoch ist es das Uebersehen dieses Umstandes allein, welches *Euler* verhindert hat, die Allgemeinheit der *Lagrange*schen Resultate zu erreichen. *Euler* kannte das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft nur für Anziehungen nach festen Centren. Am Ende der „*Nova methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes*" hat *Euler* in dem „*Appendix de motu projectorum*" mit sehr unvollkommenen Ausdrücken der Differentialgleichungen für die gegenseitige Attraction sich begnügt. Erst *Daniel Bernoulli* hat in einer der philosophischen Classe der Berliner Akademie eingereichten Abhandlung*) diese Bemerkung gemacht und dadurch dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft seine wahre Bedeutung gegeben. *Lagrange* hat alsdann diese Bemerkung auf die Probleme angewandt, welche sich *Euler* in dem Aufsatz „*de motu projectorum*" gestellt hatte, und ist dadurch auf seine Hauptresultate gekommen.

Der Ausdruck U ist von *Hamilton* mit dem Namen *Kräftefunction* (force function) belegt worden. Der partielle Differentialquotient dieses Ausdrucks nach einer Coordinate einer der betrachteten n Massen giebt die Kraft, mit welcher diese Masse von allen übrigen angezogen wird, nach der Richtung dieser Coordinate gemessen.

Für das *Newton*sche Attractionsgesetz wird die Kräftefunction

$$U = \Sigma\frac{m_i m_{i_1}}{r_{i,i_1}},$$

*) Mém. de l'acad. de Berlin 1748.