GEOMETRISCHE ABHANDLUNGEN.

EULERI FORMULAE DE TRANSFORMATIONE COORDINATARUM.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 2 p. 188—189.

1. Cum nuper animi causa plurima commentariorum Academiae Petropolitanae volumina perlustrarem, incidi in commentationem Eulerianam inscriptam: *Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum*, quae in tom. XX nov. comm. a. 1775 legitur. Quas ibi exhibet ille de transformatione coordinatarum formulas, cum nec inelegantes sint et minus cognitae esse videantur, hoc loco referam.

Duo coordinatarum systemata rectangularia esse supponuntur, quae initio gaudent communi; vocentur alterius coordinatae x, y, z, alterius p, q, r; atque sit

$$\begin{aligned} x &= \alpha p+\beta q+\gamma r, \\ y &= \alpha' p+\beta' q+\gamma' r, \\ z &= \alpha'' p+\beta'' q+\gamma'' r. \end{aligned}$$

Notum est, inter novem coëfficientes α, β etc. sex intercedere relationes, ita ut per quantitates tres exprimere liceat omnes. Eulerus in commentatione memorata novem illas quantitates hunc in modum a tribus angulis η, η', η'' pendere docet. Ponit ille

$$\begin{array}{lll} \alpha = \sin\zeta, & \alpha' = \cos\zeta\ \sin\eta, & \alpha'' = \cos\zeta\ \cos\eta, \\ \beta = \sin\zeta', & \beta' = \cos\zeta'\sin\eta', & \beta'' = \cos\zeta'\ \cos\eta', \\ \gamma = \sin\zeta'', & \gamma' = \cos\zeta''\sin\eta'', & \gamma'' = \cos\zeta''\cos\eta''. \end{array}$$

Posito

$$\cos(\eta-\eta')\cos(\eta'-\eta'')\cos(\eta''-\eta) = -\triangle\triangle,$$

probat, fieri

$$\operatorname{tg}\zeta = -\frac{\triangle}{\cos(\eta'-\eta'')}, \quad \operatorname{tg}\zeta' = -\frac{\triangle}{\cos(\eta''-\eta)}, \quad \operatorname{tg}\zeta'' = -\frac{\triangle}{\cos(\eta-\eta')},$$

fieri etiam

$$\begin{aligned}
\sin\zeta &= -\sqrt{\operatorname{cotg}(\eta''-\eta)\operatorname{cotg}(\eta-\eta')},\\
\sin\zeta' &= -\sqrt{\operatorname{cotg}(\eta-\eta')\operatorname{cotg}(\eta'-\eta'')},\\
\sin\zeta'' &= -\sqrt{\operatorname{cotg}(\eta'-\eta'')\operatorname{cotg}(\eta''-\eta)}.
\end{aligned}$$

2. In eadem commentatione Eulerus demonstrat, semper dari axem, qui et ipse per initium commune transit, circa quem ita rotari possit alterum systema, ut in situm alterius perveniat. Neque tamen in illa commentatione formulas huc pertinentes exhibere valet, sed rem in alia commentatione inscripta: *Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi* retractat; invitaverat etiam ad suscipiendum negotium ingeniosum eius amicum Lexell, qui de eadem re agit in commentatione inscripta: *Theoremata nonnulla generalia de translatione corporum rigidorum.* Utraque commentatio in eodem tomo XX legitur. Sit angulus gyrationis φ; axis, circa quem gyratio fit, cum axibus coordinatarum x, y, z resp. formet angulos a, b, c, unde

$$\cos a\cos a+\cos b\cos b+\cos c\cos c = 1.$$

Gyratione transacta, axem $\tau\tilde{\omega}\nu$ x ad axem $\tau\tilde{\omega}\nu$ p, axem $\tau\tilde{\omega}\nu$ y ad axem $\tau\tilde{\omega}\nu$ q, axem $\tau\tilde{\omega}\nu$ z ad axem $\tau\tilde{\omega}\nu$ r pervenisse supponitur, ita ut axis gyrationis cum axibus coordinatarum p, q, r eosdem formet angulos a, b, c. Nec non ubi per axem gyrationis duo ducantur plana, quae per axes $\tau\tilde{\omega}\nu$ x et $\tau\tilde{\omega}\nu$ p transeunt, duo, quae per axes $\tau\tilde{\omega}\nu$ y et $\tau\tilde{\omega}\nu$ q, duo, quae per axes $\tau\tilde{\omega}\nu$ z et $\tau\tilde{\omega}\nu$ r transeunt, bina eiusmodi plana formabunt eundem angulum φ.

Uterque invenit post calculos satis prolixos formulas sequentes:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\varphi\sin^2 a+\cos^2 a,\\
\alpha' &= \sin\varphi\cos c+\cos a\cos b(1-\cos\varphi),\\
\alpha'' &= -\sin\varphi\cos b+\cos a\cos c(1-\cos\varphi),\\
\beta' &= \cos\varphi\sin^2 b+\cos^2 b,\\
\beta'' &= \sin\varphi\cos a+\cos b\cos c(1-\cos\varphi),\\
\beta &= -\sin\varphi\cos c+\cos b\cos a(1-\cos\varphi),\\
\gamma'' &= \cos\varphi\sin^2 c+\cos^2 c,\\
\gamma &= \sin\varphi\cos b+\cos c\cos a(1-\cos\varphi),\\
\gamma' &= -\sin\varphi\cos a+\cos c\cos b(1-\cos\varphi).
\end{aligned}$$

Notentur adhuc relationes sequentes:

$$\alpha+\beta'+\gamma'' = 1+2\cos\varphi,$$

quam formulam ex elegantissimis esse censeo,

$$\begin{aligned}
\alpha'-\beta &= 2\sin\varphi\cos c, & \alpha'+\beta &= 2\cos a\cos b\,(1-\cos\varphi),\\
\beta''-\gamma' &= 2\sin\varphi\cos a, & \beta''+\gamma' &= 2\cos b\cos c\,(1-\cos\varphi),\\
\gamma-\alpha'' &= 2\sin\varphi\cos b, & \gamma+\alpha'' &= 2\cos c\cos a\,(1-\cos\varphi),
\end{aligned}$$

$$\alpha'\alpha'-\beta\beta = \beta''\beta''-\gamma'\gamma' = \gamma\gamma-\alpha''\alpha'' = 4\cos a\cos b\cos c\sin\varphi\,(1-\cos\varphi),$$

$$\frac{(\alpha'-\beta)(\beta''-\gamma')}{\gamma+\alpha''} = \frac{(\beta''-\gamma')(\gamma-\alpha'')}{\alpha'+\beta} = \frac{(\gamma-\alpha'')(\alpha'-\beta)}{\beta''+\gamma'}$$

$$= 2(1+\cos\varphi) = 1+\alpha+\beta'+\gamma''$$

etc. etc.

Demonstrationes, quas illi VV. Cll. dederunt, hodie elegantiores reddi possunt. Hic tamen rem tantummodo indicatam volo, atque iuvat, formulas maxime memorabiles oblivioni eripuisse.

Regiom., Junii 1827.

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 6 p. 213.

Supposons qu'un angle mobile et de grandeur donnée touche constamment une même courbe donnée; soit P un des points de la courbe décrite par le sommet de l'angle et soient A, B les points de contact de la courbe donnée qui répondent à ce point: la normale menée au point P à la courbe décrite par le sommet de l'angle mobile passera par le centre du cercle circonscrit au triangle PAB.

Si l'angle mobile est droit, la normale passera par le milieu de la corde de contact AB. On en tire aisément le théorème connu, que la courbe décrite par le sommet d'un angle mobile droit, dont les cotés touchent constamment une conique, est un cercle concentrique à cette courbe.

AUSZUG EINES SCHREIBENS VON C. G. J. JACOBI AN J. STEINER.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 12 p. 137—140.

Ein Satz, den ich Dir früher mittheilte, heisst in seiner Vollständigkeit:

1. *„Sind zwei Flächen zweiten Grades, ein Ellipsoid und ein einfaches Hyperboloid, confocal, d. h. haben ihre Hauptschnitte gemeinschaftliche Brennpunkte, und legt man aus irgend einem Punkte K des Hyperboloids einen Berührungskegel (K) an das Ellipsoid, so sind die durch denselben Punkt gehenden zwei Strahlen des Hyperboloids die Brennlinien dieses Kegels (K).“*

Dieser Satz scheint mir nicht ganz unwichtig zu sein. Er lässt sich noch allgemeiner auffassen und dann mit einem reciproken Satze zusammenstellen. Auch gestattet er viele Folgerungen für interessante specielle Fälle. Z. B. ein Corollar ist:

2. *„Dass die aus irgend einem Punkte K an eine Schaar confocaler Flächen zweiten Grades gelegten Berührungskegel dieselben Brennlinien und dieselben Axen haben.“*

Ein besonderer Fall, den ich erwähnen will, heisst:

3. *„Wenn man aus einem Punkte K der Ebene derjenigen Hyperbel h, welche nach Deinem Satze der Ort der Scheitel aller geraden Kegel ist, die sich einem Ellipsoid umschreiben lassen*), an das Ellipsoid E einen Berührungskegel legt, so sind die aus dem Punkte K an die Hyperbel h gelegten Tangenten die Brennlinien des Kegels.“*

„Liegt der Punkt K auf der Hyperbel h, so vereinigen sich die Tangenten

*) Siehe Bd. I, S. 47 des Crelleschen Journals.

in eine, oder die Brennlinien fallen zusammen, und der Kegel wird gerade", welches Dein Satz ist.

Der entgegenstehende oder reciproke Satz heisst:

„*Wenn irgend eine Fläche zweiten Grades, F, und irgend ein Punkt, M, gegeben sind, so giebt es, im Allgemeinen, eine Schaar gerader Kegelflächen (zweiten Grades), deren Scheitel im Punkte M liegen, und welche die Fläche F in ebenen Curven (Kegelschnitten) schneiden; die Ebenen aller dieser Curven schneiden einander in irgend einem Punkte N und umhüllen irgend eine Kegelfläche zweiten Grades, (N).*"

„*Legt man durch den Punkt N eine beliebige Ebene, welche die Fläche F in einem Kegelschnitte k und die Kegelfläche (N) in zwei Strahlen a, b schneidet, so hat die Kegelfläche (Mk), die durch k geht und deren Scheitel in M liegt, die Ebenen (Ma), (Mb), welche der Punkt M mit den Strahlen a, b bestimmt, zu Kreis-Ebenen, d. h. jede andere Ebene, welche mit einer derselben parallel ist, schneidet die Kegelfläche (Mk) in einem Kreise.*"

Der Satz, den Du ehemals bei Deinen Untersuchungen über einander berührende Kugeln gefunden hast, und der später von französischen Mathematikern bekannt gemacht worden ist, nämlich der Satz:

4. „*Dass, wenn von zwei Kegelschnitten (einer Ellipse und einer Hyperbel) jeder die Brennpunkte des anderen zu Scheiteln hat und ihre Ebenen zu einander senkrecht stehen, dass dann jeder der Ort der Scheitel aller geraden Kegel ist, welche den anderen zur Basis haben, und dass jede zwei Punkte des einen räumliche Brennpunkte des anderen sind; d. h. nimmt man in der Hyperbel irgend zwei Punkte an, so ist die Summe oder die Differenz ihrer Entfernungen von jedem Punkte der Ellipse constant, je nachdem sie in verschiedenen oder in demselben Zweige der Hyperbel liegen; und umgekehrt sind je zwei Punkte der Ellipse so beschaffen, dass die Differenz ihrer Abstände von jedem Punkte der Hyperbel constant ist, u. s. w.*"

folgt leicht aus dem Ivoryschen Satze über Flächen zweiten Grades, deren Hauptschnitte confocal sind. Auch folgen aus dem Ivoryschen Satze noch andere Sätze über Erzeugung der Flächen und Linien zweiten Grades, welche einander analog sind, und welche die Eigenschaften der Brennpunkte, in einer Hinsicht, als besondere Fälle in sich schliessen, nämlich nachstehende Sätze:

5. „*Werden im Raume irgend drei feste Punkte a, b, c und irgend drei andere, jenen beziehlich entsprechende, feste Punkte A, B, C angenommen, und*

werden in Rücksicht auf diese Fundamentalpunkte andere entsprechende Punkte x, X so bestimmt, dass ihre Abstände von jenen respective gleich sind, d. h. dass $xa = XA$, $xb = XB$, $xc = XC$, so hat man ein Correlationssystem, worin der Punkt X irgend eine Fläche zweiten Grades beschreibt, wenn der Punkt x sich in einer Ebene bewegt: und auch umgekehrt.«

6. *„Werden in zwei verschiedenen Ebenen (oder auch in einer Ebene) zwei Paar feste oder Hauptpunkte a und b, A und B angenommen, und werden sofort die übrigen Punkte der Ebenen dergestalt auf einander bezogen, dass je zwei entsprechende Punkte x und X von den respectiven Hauptpunkten gleiche Abstände haben, so dass $ax = AX$ und $bx = BX$, so hat man ein Beziehungssystem, wobei jeder Geraden in der einen Ebene ein Kegelschnitt in der anderen Ebene entspricht, d. h. bewegt sich z. B. der Punkt x in irgend einer Geraden g, so beschreibt der entsprechende Punkt X einen Kegelschnitt G.«*

Diese Sätze, (5) und (6), scheinen mir zu vielen Untersuchungen Anlass zu geben, wozu ich jedoch vor der Hand nicht kommen werde. Eine nähere Discussion des letzten Satzes (6) giebt z. B. sogleich folgende Resultate:

7. *a) „Bewegt sich der Punkt x in der Fundamentalaxe ab selbst, so beschreibt X einen Kegelschnitt, der die Hauptpunkte A, B zu Brennpunkten hat, und dessen erste Axe der Geraden ab gleich ist«;* welches der bekannte Satz über die Brennpunkte der Kegelschnitte ist.

b) „Die eine oder andere Axe des Kegelschnitts G, welcher einer beliebigen Geraden g entspricht (6), *liegt in der Fundamentalaxe AB.«*

c) „Man denke sich in der ersten Ebene denjenigen Kegelschnitt k, welcher der Hauptaxe AB entspricht, und mithin die Hauptpunkte a, b zu Brennpunkten hat (a):

α) Ist die Gerade AB grösser als ab, so ist k eine Ellipse, und dann entspricht der Geraden g eine Hyperbel G, deren erste oder zweite Axe in der Fundamentalaxe AB liegt, je nachdem die Gerade g den Kegelschnitt k schneidet, oder nicht; berührt sie ihn, dann besteht der Kegelschnitt G aus zwei Geraden, die sich in irgend einem Punkte der Hauptaxe AB schneiden und mit dieser gleiche Winkel bilden; ist $2(ab)^2 > (AB)^2$, so giebt es zwei bestimmte Richtungen für die Gerade g, wo ihr gleichseitige Hyperbeln G entsprechen, und zwar sind die Asymptoten aller dieser gleichseitigen Hyperbeln einander parallel, oder diese Hyperbeln haben zwei unendlich entfernte gemeinschaftliche Punkte.

β) Ist die Axe AB kleiner als ab, so ist k eine Hyperbel, und alsdann *entspricht der Geraden g eine Ellipse G oder eine Hyperbel G, je nachdem die durch den Mittelpunkt der Hyperbèl k mit g parallel gezogene Gerade* g_1 *im inneren oder äusseren Asymptoten-Winkel dieser Hyperbel liegt; ist g insbesondere mit einer Asymptote der Hyperbel k parallel, so ist G eine Parabel; ebenso giebt es zwei bestimmte Richtungen für die Gerade g, wo ihr immer eine gleichseitige Hyperbel G entspricht."*

d) „Steht g auf der Hauptaxe ab senkrecht, so entspricht ihr allemal eine Gerade G (eigentlich zwei vereinigte Gerade), welche zu der Axe AB rechtwinkelig ist; u. s. w."

e) „Ist g (statt einer Geraden) eine Curve vom n^{ten} *Grade, so entspricht ihr eine Curve G vom* $2n^{ten}$ *Grade; u. s. w."*

Aehnliche Resultate folgen aus dem ersten Satze (5). Im Strahlbüschel im Raume, oder auf der Kugelfläche, findet ein Satz statt, welcher dem vorstehenden (6) analog ist, und zwar findet er da, nach dem Principe der Reciprocität, in doppelter Gestalt statt. Uebrigens lassen sich auf diese Weise auch noch andere Beziehungssysteme aufstellen, wenn man statt der obigen einfachen Grundbedingungen, (5) und (6), andere annimmt.

Der Ivorysche Satz zeigt ferner, dass die Curve von doppelter Krümmung, in welcher zwei Flächen zweiten Grades einander schneiden, auch räumliche Brennpunkte haben kann, und dass es also z. B. für jede Krümmungscurve des Ellipsoids zwei bestimmte feste Punkte giebt, die leicht zu construiren sind, von der Beschaffenheit, dass die Summe ihrer Distanzen von jedem Punkte der Curve constant ist, worauf sich eine leichte organische Erzeugung der Krümmungscurve gründen lässt; u. s. w.