ABHANDLUNGEN

ZUR

THEORIE DER BESTIMMTEN INTEGRALE

UND DER REIHEN.

UEBER GAUSS' NEUE METHODE, DIE WERTHE DER INTEGRALE NÄHERUNGSWEISE ZU FINDEN.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 1 p. 301—308.

1.

In den *Principiis* von Newton liest man eine Methode, wie man durch eine Anzahl gegebener Punkte eine parabolische Curve legen könne. Diese Aufgabe erscheint analytisch als Interpolationsproblem, aus mehreren Gliedern einer Reihe das allgemeine zu finden. Es ist der bekanntere Fall, wenn die Intervalle der Ordinaten der gegebenen Punkte gleich grofs sind oder, analytisch ausgedrückt, wenn die Werthe des reihenden Elements, für welche auch die Werthe der entsprechenden Glieder der Reihe gegeben sind, eine arithmetische Progression bilden. Aber der elegante, mit Unrecht weniger gekannte Algorithmus, den Newton giebt, erstreckt sich schon auf den allgemeineren Fall, wenn jene Intervalle der Ordinaten der gegebenen Punkte oder jene Werthe des reihenden Elements ganz beliebige sind. Newton hat hiervon eine Anwendung auf die Quadraturen gemacht. Durch mehrere Punkte der zu quadrirenden Curve, für welche die Ordinaten berechnet worden sind, legt er die parabolische Curve, und deren Quadratur zwischen denselben Grenzen, zwischen denen die gegebene Curve quadrirt werden sollte, giebt einen Näherungswerth.

Newton hat von jenem Interpolationsproblem und seiner Anwendung auf die Quadraturen ferner in einem Tractätchen gehandelt, welches *Methodus* *differentialis* betitelt ist und zuerst der Amsterdamer*) Ausgabe seiner *Principia*, v. J. 1723, nebst anderen Abhandlungen angehängt gefunden wird. Hier räth er unter Anderem, zum Behuf der leichteren Berechnung der Integrale für jede Zahl der berechneten Ordinaten, deren Intervalle er gleich grofs annimmt, Tafeln anzufertigen, von denen er auch selbst einen Anfang giebt, welchen hernach Roger Cotes in seiner *Harmonia mensurarum* fortgesetzt hat.

Aber Gaufs hat in den *Göttinger Commentarien* gezeigt, dafs man durch schickliche Wahl der Abscissen, für welche die Ordinaten berechnet werden, den Grad der Näherung auf das Doppelte treiben kann; und da solche Bestimmung unabhängig von der Natur der zu quadrirenden Curve geschieht, so ist es möglich, auch nach der so vervollkommneten Methode Tafeln zu verfertigen, von denen auch Gaufs eine Probe gegeben hat. Gaufs gelangt zu seinen Resultaten auf dem Wege einer schwierigen Induction, die durch die sogenannte Kästnersche Methode, wenn etwas für die Zahl n gilt, es auch für die Zahl $n+1$ zu erweisen, zur Allgemeinheit erhoben werden kann. Es ist also noch ein directer Beweis zu wünschen. Die grofse Einfachheit und Eleganz der Gaufsschen Resultate läfst einen einfachen Weg vermuthen. Auf einem solchen einfachen und directen Wege zu jenen Resultaten zu gelangen, mit denen Gaufs die Wissenschaft bereichert hat, ist der Zweck dieser Abhandlung.

2.

Es sei das Integral $\int y dx$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ zu nehmen. Andere Grenzen werden leicht auf diese zurückgeführt. Es seien ferner die Werthe von x, für welche y bekannt ist, α', α'', α''', $\dots$, $\alpha^{(n)}$, so dafs, wenn man $y = f(x)$ setzt, die entsprechenden Werthe von y werden

$$f(\alpha'),\ f(\alpha''),\ f(\alpha'''),\ \dots,\ f(\alpha^{(n)}).$$

Man bilde das Product

$$(x-\alpha')(x-\alpha'')(x-\alpha''')\dots(x-\alpha^{(n)})$$

*) Von dieser Ausgabe ist die Curiosität zu erzählen, dafs sie auf Kosten des berühmten Philologen Richard Bentley veranstaltet worden ist, der in seinen englischen und lateinischen Predigten oft die *Principia* seines genauen Freundes Newton anpries, als ein Bollwerk gegen die Irreligiosität und eine Offenbarung der Gröfse Gottes.

und nenne es $\varphi(x)$, so hat man, wenn $y = f(x)$ eine ganze rationale Function vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, durch Zerfällung in Partialbrüche

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(\alpha')}{\varphi'(\alpha')(x-\alpha')} + \frac{f(\alpha'')}{\varphi'(\alpha'')(x-\alpha'')} + \frac{f(\alpha''')}{\varphi'(\alpha''')(x-\alpha''')} + \cdots + \frac{f(\alpha^{(n)})}{\varphi'(\alpha^{(n)})(x-\alpha^{(n)})},$$

wo wir mit $\varphi'(\alpha^{(m)})$ den Werth von $\varphi'(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$ für $x = \alpha^{(m)}$ bezeichnen. Vermittelst dieser Formel findet man durch Multiplication mit $\varphi(x)$ sogleich y aus den speciellen Werthen für

$$x = \alpha', \quad x = \alpha'', \quad x = \alpha''', \quad \ldots, \quad x = \alpha^{(n)}.$$

Uebersteigt aber y den $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad, so giebt der Ausdruck zur rechten Seite des Gleichheitszeichens, welchen wir G nennen wollen, nur den echten Bruch, der in dem unechten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ steckt; so dafs, wenn $f(x)$ z. B. vom $(n+p)^{\text{ten}}$ Grade ist und man $f(x) = U + V\varphi(x)$ hat, wo U höchstens vom $(n-1)^{\text{ten}}$, V vom p^{ten} Grade ist,

$$G = \frac{U}{\varphi(x)}, \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{U}{\varphi(x)} + V = G + V.$$

Entwickelt man G und den Bruch $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nach den absteigenden Potenzen von x, so enthält $G = \frac{U}{\varphi(x)}$ die negativen, V die positiven Potenzen von x, die sich in der Entwickelung von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ befinden. Setzt man daher

$$f(x) = a + a'x + a''x^2 + \cdots + a^{(n)}x^n + a^{(n+1)}x^{n+1} + \cdots + a^{(2n)}x^{2n} + \cdots$$

und

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{A'}{x^n} + \frac{A''}{x^{n+1}} + \frac{A'''}{x^{n+2}} + \cdots + \frac{A^{(n+1)}}{x^{2n}} + \cdots,$$

so findet man

$$V = a^{(n)}A' + a^{(n+1)}(A'x + A'') + a^{(n+2)}(A'x^2 + A''x + A''') + \cdots$$
$$+ a^{(2n-1)}(A'x^{n-1} + A''x^{n-2} + \cdots + A^{(n)}) + \cdots$$

3.

Newton's Näherungsmethode besteht darin: statt $y = f(x)$ die Function $U = G\varphi(x)$ zu substituiren. Der Fehler oder die Differenz der Integrale der gegebenen und der substituirten Function wird dann

$$\Delta = \int y\,dx - \int U\,dx = \int \varphi(x)V\,dx.$$

Es wird jetzt die Aufgabe gestellt, die Gröſsen α', α'', α''', ..., $\alpha^{(n)}$ so zu bestimmen, daſs der Fehler Δ möglichst gering oder die Näherung möglichst genau werde. In den Fällen, wo die Näherungsmethode mit Glück angewendet werden soll, müssen die Coefficienten der für y gesetzten Reihe rasch abnehmen. Je mehr daher von den ersten Coefficienten dieser Reihe, welche die hauptsächlichsten sind, in dem Ausdruck für den Fehler Δ verschwinden, desto kleiner wird er im Allgemeinen und desto gröſser die Näherung. Da nun schon, was auch die Gröſsen α', α'', α''', ..., $\alpha^{(n)}$ waren, im Ausdrucke für $\Delta = \int \varphi(x) V dx$, wie aus dem für V gefundenen Ausdruck erhellt, die Coefficienten a, a', a'', ..., $a^{(n-1)}$ nicht mehr vorkommen, so wollen wir, vermittelst schicklicher Bestimmung jener Gröſsen, auch noch die mit $a^{(n)}$, $a^{(n+1)}$, ..., $a^{(2n-1)}$ behafteten Glieder verschwinden machen, wodurch ein doppelter Grad der Näherung erreicht wird. Es wird dieses immer möglich sein, da die Zahl der willkürlichen Gröſsen und der zu erfüllenden Bedingungen dieselbe ist. Man sieht sogleich aus dem für V gefundenen Ausdruck, daſs hierzu eine solche Bestimmung von $\varphi(x)$ erfordert wird, daſs die Integrale

$$\int \varphi(x)dx, \quad \int x\varphi(x)dx, \quad \int x^2\varphi(x)dx, \quad \dots, \quad \int x^{n-1}\varphi(x)dx$$

zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$, zwischen denen das Integral $\int y dx$ genommen werden soll, verschwinden. Diese Bestimmung ist jetzt die Aufgabe.

4.

Es läſst sich durch eine bekannte Reductionsformel das Integral $\int x^m \varphi(x) dx$ auf die vielfachen Integrale von $\varphi(x)$ zurückführen. Man hat nämlich allgemein

$$\int uv dx = u\int v dx - \int\left(\frac{du}{dx}\int v dx\right)dx,$$

$$\int\left(\frac{du}{dx}\int v dx\right)dx = \frac{du}{dx}\int^2 v dx^2 - \int\left(\frac{d^2u}{dx^2}\int^2 v dx^2\right)dx,$$

$$\int\left(\frac{d^2u}{dx^2}\int^2 v dx^2\right)dx = \frac{d^2u}{dx^2}\int^3 v dx^3 - \int\left(\frac{d^3u}{dx^3}\int^3 v dx^3\right)dx,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\int\left(\frac{d^mu}{dx^m}\int^m v dx^m\right)dx = \frac{d^mu}{dx^m}\int^{m+1} v dx^{m+1} - \int\left(\frac{d^{m+1}u}{dx^{m+1}}\int^{m+1} v dx^{m+1}\right)dx,$$

wo man jede Formel aus der vorhergehenden erhält, indem man $\frac{du}{dx}$ statt u und $\int v\,dx$ statt v setzt. Hieraus folgt sogleich

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \frac{du}{dx}\int^2 v\,dx^2 + \frac{d^2u}{dx^2}\int^3 v\,dx^3 - \cdots + (-1)^m \frac{d^m u}{dx^m}\int^{m+1} v\,dx^{m+1}$$
$$+ (-1)^{m+1}\int\Big(\frac{d^{m+1}u}{dx^{m+1}}\int^{m+1} v\,dx^{m+1}\Big)dx.$$

Setzt man $u = x^m$, $v = \varphi(x)$, so erhält man hieraus

$$\int x^m\varphi(x)\,dx = x^m\int\varphi(x)\,dx - mx^{m-1}\int^2\varphi(x)\,dx^2 + m(m-1)x^{m-2}\int^3\varphi(x)\,dx^3$$
$$- \cdots + (-1)^m m(m-1)(m-2)\ldots 1\int^{m+1}\varphi(x)\,dx^{m+1}.$$

Giebt man dem m nach einander die Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, so erhält man

$$\int\varphi(x)\,dx = \int\varphi(x)\,dx,$$
$$\int x\varphi(x)\,dx = x\int\varphi(x)\,dx - \int^2\varphi(x)\,dx^2,$$
$$\int x^2\varphi(x)\,dx = x^2\int\varphi(x)\,dx - 2x\int^2\varphi(x)\,dx^2 + 2\int^3\varphi(x)\,dx^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\int x^{n-1}\varphi(x)\,dx = x^{n-1}\int\varphi(x)\,dx - (n-1)x^{n-2}\int^2\varphi(x)\,dx^2 + (n-1)(n-2)x^{n-3}\int^3\varphi(x)\,dx^3$$
$$- \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\ldots 1\int^n\varphi(x)\,dx^n.$$

Diese Formeln sind bekannt. Man sieht aus ihnen, dafs, wenn

$$\int\varphi(x)\,dx,\quad \int x\varphi(x)\,dx,\quad \int x^2\varphi(x)\,dx,\quad \ldots,\quad \int x^{n-1}\varphi(x)\,dx$$

zwischen gewissen Grenzen verschwinden sollen, zwischen denselben Grenzen auch

$$\int\varphi(x)\,dx,\quad \int^2\varphi(x)\,dx^2,\quad \int^3\varphi(x)\,dx^3,\quad \ldots,\quad \int^n\varphi(x)\,dx^n$$

verschwinden müssen, und umgekehrt.

5.

Unsere Aufgabe ist also jetzt darauf zurückgeführt, die Function $\varphi(x)$ so zu bestimmen, dafs ihr 1^{tes}, 2^{tes}, 3^{tes}, ..., n^{tes} Integral, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$, verschwindet; d. h. wenn man die auf einander folgenden Integrale bis zum n^{ten} so bestimmt, dafs sie für $x = 0$ verschwinden, so sollen sie auch für $x = 1$ verschwinden.

Man setze $\int^n \varphi(x)\,dx^n = \pi(x)$, die auf einander folgenden Integrale so bestimmt, daſs jedes für $x = 0$ verschwindet, so kann man jetzt die Aufgabe so ausdrücken, eine Function $\pi(x)$ zu finden, die für $x = 0$ und für $x = 1$ zugleich mit ihrem 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, ..., $(n-1)^{\text{ten}}$ Differentiale verschwindet. Dieses erheischt, daſs die Function $\pi(x)$ die Factoren x^n und $(x-1)^n$ habe, und umgekehrt, jede Function, die den Factor $x^n(x-1)^n$ hat, erfüllt die verlangten Bedingungen. Es muſs daher gesetzt werden $\pi(x) = x^n(x-1)^n M$. Da nun

$$\varphi(x) = (x-\alpha')(x-\alpha'')(x-\alpha''')\ldots(x-\alpha^{(n)}),$$

also eine ganze rationale Function von der n^{ten} Ordnung ist, so ist

$$\pi(x) = \int^n \varphi(x)\,dx^n$$

eine ganze rationale Function von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung, woraus folgt, daſs M für unseren Fall eine Constante ist. Auf diese Weise erhält man

$$\varphi(x) = M\frac{d^n x^n(x-1)^n}{dx^n}$$

$$= x^n - \frac{n^2}{2n}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2.2n(2n-1)}x^{n-2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)}x^{n-3}$$

$$+\cdots+(-1)^n\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)},$$

wo

$$M = \frac{1}{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}$$

gesetzt worden ist.

Die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$, für $\varphi(x)$ den eben gefundenen Ausdruck gesetzt, geben dann die Gröſsen α', α'', α''', ..., $\alpha^{(n)}$ so bestimmt, daſs der Grad der Näherung der möglichst gröſste sei. Da aus der Lehre von den Gleichungen bekannt ist, daſs, wenn die Wurzeln einer Gleichung $\pi(x) = 0$ alle reell sind, auch alle Wurzeln der Gleichung $\frac{d^m\pi(x)}{dx^m} = 0$ reell sind und zwischen den Wurzeln jener Gleichung liegen, so folgt hieraus, da die Wurzeln der Gleichung $\pi(x) = 0$ oder der Gleichung $x^n(x-1)^n = 0$ alle reell sind, und zwar n von ihnen $= 0$, die anderen $= 1$, daſs auch die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$, oder die Gröſsen α', α'', α''', ..., $\alpha^{(n)}$ alle reell sind und zwischen 0 und 1 liegen, wie es auch Gaufs in den berechneten Beispielen gefunden hat.

6.

In unserer (§. 4) gefundenen Formel

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \frac{du}{dx}\int^2 v\,dx^2 + \frac{d^2u}{dx^2}\int^3 v\,dx^3 - \cdots + (-1)^m \frac{d^m u}{dx^m}\int^{m+1} v\,dx^{m+1}$$
$$+ (-1)^{m+1}\int\left(\frac{d^{m+1}u}{dx^{m+1}}\int^{m+1} v\,dx^{m+1}\right)dx$$

setze man $m = n-1$, $u = V$, $v = \varphi(x)$, so erhält man, da die n ersten Integrale von $v = \varphi(x)$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ verschwinden, und

$$\int^n \varphi(x)\,dx^n = \frac{x^n(x-1)^n}{2n(2n-1)\ldots(n+1)},$$

$$\Delta = \int \varphi(x)\,V\,dx = \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}\int x^n(x-1)^n \frac{d^nV}{dx^n}\,dx,$$

welches Integral zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ zu nehmen ist.

Man setze ferner in der angeführten Formel $u = t^{m+1}$, und es verschwinde t für $x = l$, so wird auch u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, …, $\frac{d^mu}{dx^m}$ für $x = l$ verschwinden. Es seien ferner die Integrale $\int v\,dx$, $\int^2 v\,dx^2$, $\int^3 v\,dx^3$, …, $\int^{m+1} v\,dx^{m+1}$ so genommen, dafs sie insgesammt für $x = 0$ verschwinden; so verschwinden

$$u\int v\,dx,\quad \frac{du}{dx}\int^2 v\,dx^2,\quad \frac{d^2u}{dx^2}\int^3 v\,dx^3,\ \ldots,\ \frac{d^mu}{dx^m}\int^{m+1} v\,dx^{m+1}$$

zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = l$. Man erhält demnach, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = l$,

$$\int uv\,dx = \int t^{m+1} v\,dx = (-1)^{m+1}\int\left(\frac{d^{m+1}t^{m+1}}{dx^{m+1}}\int^{m+1} v\,dx^{m+1}\right)dx.$$

Setzt man jetzt $t = 1-x$, $l = 1$, $m = n-1$, $v = x^n\frac{d^nV}{dx^n}$, so erhält man, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$,

$$\int (1-x)^n x^n \frac{d^nV}{dx^n}\,dx = 1.2.3\ldots n\int\left(\int^n x^n \frac{d^nV}{dx^n}\,dx^n\right)dx = 1.2.3\ldots n\int^{n+1} x^n \frac{d^nV}{dx^n}\,dx^{n+1}.$$

Man erhält auf diese Weise

$$\Delta = \frac{1.2.3\ldots n}{2n(2n-1)\ldots(n+1)}\int^{n+1} x^n \frac{d^n V}{dx^n} dx^{n+1},$$

wo die auf einander folgenden Integrale so zu nehmen sind, dafs sie für $x = 0$ verschwinden, und nach beendigter Integration $x = 1$ zu setzen ist. Unter dieser Form ist der Fehler Δ am leichtesten zu berechnen.

7.

Vermöge des (§. 2) findet man

$$\frac{d^n V}{dx^n} = \left\{\begin{array}{l} a^{(2n)}\, n(n-1)(n-2)\ldots 1\,.\,A' \\ +\, a^{(2n+1)}\,[(n+1)\,n(n-1)\ldots 2\,.\,A'\,x + n(n-1)(n-2)\ldots 1\,.\,A''] \\ +\, a^{(2n+2)}\,[(n+2)(n+1)\,n\ldots 3\,.\,A'\,x^2 + (n+1)\,n(n-1)\ldots 2\,.\,A''\,x \\ \qquad\qquad + n(n-1)(n-2)\ldots 1\,.\,A'''] \\ +\, a^{(2n+3)}\,[(n+3)(n+2)(n+1)\ldots 4\,.\,A'\,x^3 + (n+2)(n+1)\,n\ldots 3\,.\,A''\,x^2 \\ \qquad\qquad + (n+1)\,n(n-1)\ldots 2\,.\,A'''\,x + n(n-1)(n-2)\ldots 1\,.\,A''''] \\ +\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\Delta = \frac{1^2.2^2.3^2\ldots n^2}{(n+1)^2(n+2)^2\ldots(2n)^2(2n+1)}\cdot\left\{\begin{array}{l} a^{(2n)}A' + a^{(2n+1)}\left(\frac{(n+1)^2}{2n+2}A' + A''\right) \\ +\, a^{(2n+2)}\left(\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{1.2.(2n+2)(2n+3)}A' + \frac{(n+1)^2}{2n+2}A'' + A'''\right) \\ +\, a^{(2n+3)}\left(\frac{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2}{1.2.3.(2n+2)(2n+3)(2n+4)}A' \right. \\ \qquad\left. + \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{1.2.(2n+2)(2n+3)}A'' + \frac{(n+1)^2}{2n+2}A''' + A''''\right) \\ +\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Diese ersten Glieder des Fehlers Δ können zur Correctur dienen. Die Grössen A', A'', A''', A'''', ... bilden eine wiederkehrende Reihe, da sie aus der Entwickelung des Bruchs

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{x^n - \frac{n^2}{2n}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2.2n(2n-1)}x^{n-2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)}x^{n-3} + \cdots + (-1)^n\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}}$$

entstanden sind, welche wir (§. 2)