ÜBER DIE INTEGRATION DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

VON

PROFESSOR C. G. J. JACOBI
ZU KÖNIGSBERG IN PREUSSEN.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 2. p. 317—329.

ÜBER DIE INTEGRATION DER PARTIELLEN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG.

1.

Die Entstehung und Ausbildung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen bildet einen der wichtigsten Momente in der Geschichte der Mathematik des 18. Jahrhunderts. Euler hatte diesen so fruchtbaren Zweig der Analysis ans Licht gerufen, und in einer grossen Zahl von Beispielen durch besondere, dem jedesmaligen Falle angepasste Kunstgriffe die Integration bewerkstelligt. Lagrange gab hierauf die ersten allgemeinen Vorschriften, die linearen partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen jeder Anzahl von Variabeln, und insbesondere jede auch nicht lineare zwischen drei Variabeln auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückzuführen. Die von Lagrange zu letzterem Zwecke angewandte Methode schien keiner Ausdehnung auf jede Anzahl von Variabeln fähig zu sein, da die Analysten, die dieses versuchten, die ihnen aufstossenden Schwierigkeiten nicht überwinden konnten. Pfaff betrachtete daher den Gegenstand aus einem von allen bisherigen gänzlich verschiedenen Gesichtspunkte. Er sah nämlich das ganze Problem der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung als speciellen Fall des weit umfassenderen an, jede gewöhnliche lineare Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren; und indem er dieses Problem vollständig löste, hat er zugleich die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vollendet.

Ich werde im Folgenden diesen Gegenstand wieder aufnehmen, und ihn einer, wie ich glaube, neuen Behandlung unterwerfen, welche sich vielleicht durch ihre Leichtigkeit den Analysten empfiehlt. Durch sie werden die Schwierigkeiten, welche der Ausdehnung der Lagrangeschen Methode auf jede Anzahl von Variabeln entgegen standen, so weit die Natur dieser Methode es möglich macht, gehoben werden, und man wird so auf dem entgegengesetzten Wege zu denselben Resultaten gelangen, welche Pfaff gefunden hat. —

2.

Ich beginne mit einigen Betrachtungen über die Integration eines Systems von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $n+1$ Variabeln.

Es seien die $n+1$ Variabeln $x,\ x',\ x'',\ \dots,\ x^{(n)}$. Es sollen n derselben, z. B., $x',\ x'',\ \dots,\ x^{(n)}$, als Functionen der übrigen durch ein System von n Differentialgleichungen bestimmt werden, in welchen nur die ersten Ableitungen von $x',\ x'',\ \dots,\ x^{(n)}$, in Beziehung auf x genommen, vorkommen. Diese n Gleichungen lassen sich immer unter die Form bringen:

$$\frac{dx'}{dx}=\frac{X'}{X},\quad \frac{dx''}{dx}=\frac{X''}{X},\quad \dots,\quad \frac{dx^{(n)}}{dx}=\frac{X^{(n)}}{X},$$

welche man auch als Proportion darstellen kann:

$$dx:dx':dx'':\ldots:dx^{(n)} = X:X':X'':\ldots:X^{(n)},$$

wo $X,\ X',\ X'',\ \dots,\ X^{(n)}$ Functionen von $x,\ x',\ x'',\ \dots,\ x^{(n)}$ sind, und wo es gleichgültig ist, welche der $n+1$ Variablen man als unabhängig betrachtet.

Es ist seit langer Zeit bekannt, wie man aus diesen Gleichungen $n-1$ Variabeln, z. B. $x'',\ x''',\ \dots,\ x^{(n)}$, eliminiren kann. Differentiirt man nämlich die Gleichung $\frac{dx'}{dx}=\frac{X'}{X}$ $(n-1)$-mal hintereinander nach x, und setzt jedesmal für die vorkommenden Ableitungen $\frac{dx'}{dx},\ \frac{dx''}{dx},\ \dots,\ \frac{dx^{(n)}}{dx}$ ihre Werthe in $x,\ x',\ x'',\ \dots\ x^{(n)}$, so erhält man $\frac{dx'}{dx},\ \frac{d^2x'}{dx^2},\ \frac{d^3x'}{dx^3},\ \dots,\ \frac{d^nx'}{dx^n}$ gegebenen Functionen dieser Variabeln gleich. Aus den so entstehenden n Gleichungen kann man dann die $n-1$ Variabeln $x'',\ x''',\ \dots,\ x^{(n)}$ eliminiren, und erhält so eine Gleichung von der Form:

$$\varphi\left(x,\ x',\ \frac{dx'}{dx},\ \frac{d^2x'}{dx^2},\ \dots,\ \frac{d^nx'}{dx^n}\right)=0.$$

Es hat aber bekanntlich jede solche Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung n verschiedene Integralgleichungen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, von denen jede eine willkürliche Constante enthält. Es seien diese:

$$\begin{aligned}
F_1\left(x,\ x',\ \frac{dx'}{dx},\ \frac{d^2x'}{dx^2},\ \dots,\ \frac{d^{n-1}x'}{dx^{n-1}}\right) &= C_1,\\
F_2\left(x,\ x',\ \frac{dx'}{dx},\ \frac{d^2x'}{dx^2},\ \dots,\ \frac{d^{n-1}x'}{dx^{n-1}}\right) &= C_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
F_n\left(x,\ x',\ \frac{dx'}{dx},\ \frac{d^2x'}{dx^2},\ \dots,\ \frac{d^{n-1}x'}{dx^{n-1}}\right) &= C_n,
\end{aligned}$$

wo $C_1, C_2, \ldots, C_n$ die willkürlichen Constanten bedeuten. Substituirt man hierin für $\frac{dx'}{dx}, \frac{d^2x'}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}x'}{dx^{n-1}}$ ihre Werthe in $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}$, so hat man das verlangte System von n endlichen Gleichungen mit n willkürlichen Constanten, welches die Gleichungen

$$dx : dx' : dx'' : \ldots : dx^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)}$$

integrirt.

3.

In welcher Form auch die n Integralgleichungen mit n willkürlichen Constanten gefunden werden, so wird man sie immer durch Auflösung nach den n willkürlichen Constanten in diese Form bringen können:

$$F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad \ldots, \quad F_n = C_n,$$

wo $F_1, F_2, \ldots, F_n$ die willkürlichen Constanten nicht enthalten. In dieser Form haben die Integralgleichungen die merkwürdige Eigenschaft, dass, wenn man sie differentiirt, unmittelbar auch die willkürlichen Constanten verschwinden, so dass die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
0 = dF_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial x}dx + \frac{\partial F_1}{\partial x'}dx' + \frac{\partial F_1}{\partial x''}dx'' + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x^{(n)}}dx^{(n)},\\
0 = dF_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial x}dx + \frac{\partial F_2}{\partial x'}dx' + \frac{\partial F_2}{\partial x''}dx'' + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial x^{(n)}}dx^{(n)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 = dF_n &= \frac{\partial F_n}{\partial x}dx + \frac{\partial F_n}{\partial x'}dx' + \frac{\partial F_n}{\partial x''}dx'' + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x^{(n)}}dx^{(n)}
\end{aligned}$$

ohne Dazwischenkunft der Integralgleichungen

$$F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad \ldots, \quad F_n = C_n$$

mit den gegebenen Gleichungen

$$dx : dx' : dx'' : \ldots : dx^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)}$$

übereinkommen werden; denn durch solche Dazwischenkunft würden die willkürlichen Constanten wieder eingeführt werden. Hieraus folgt aber das Stattfinden folgender identischen Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases}
\frac{\partial F_1}{\partial x}X + \frac{\partial F_1}{\partial x'}X' + \frac{\partial F_1}{\partial x''}X'' + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x^{(n)}}X^{(n)} = 0,\\
\frac{\partial F_2}{\partial x}X + \frac{\partial F_2}{\partial x'}X' + \frac{\partial F_2}{\partial x''}X'' + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial x^{(n)}}X^{(n)} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial F_n}{\partial x}X + \frac{\partial F_n}{\partial x'}X' + \frac{\partial F_n}{\partial x''}X'' + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x^{(n)}}X^{(n)} = 0.
\end{cases}$$

Die Integration der Differentialgleichungen

$$dx:dx':dx'':\ldots:dx^{(n)} = X:X':X'':\ldots:X^{(n)}$$

kommt also mit der Lösung der Aufgabe überein: n verschiedene Functionen F zu finden, von denen jede der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x}X+\frac{\partial F}{\partial x'}X'+\frac{\partial F}{\partial x''}X''+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}X^{(n)} = 0$$

identisch Genüge leiste.

Wenn die Functionen $F_1, F_2, \ldots, F_n$, jede für F gesetzt, diese Bedingung erfüllen, so ist dies auch der Fall mit jeder wieder aus diesen zusammengesetzten Function. Denn es sei solche $\Pi(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, so wird man, wenn man die Gleichungen (I) respective mit $\frac{\partial \Pi}{\partial F_1}, \frac{\partial \Pi}{\partial F_2}, \ldots, \frac{\partial \Pi}{\partial F_n}$ multiplicirt und hierauf addirt, die Gleichung

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}X+\frac{\partial \Pi}{\partial x'}X'+\frac{\partial \Pi}{\partial x''}X''+\cdots+\frac{\partial \Pi}{\partial x^{(n)}}X^{(n)} = 0$$

erhalten, so dass auch Π für F gesetzt werden kann.

4.

Nach diesen vorausgeschickten Betrachtungen ergiebt sich die Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung von selbst. Es sei nämlich x als Function von $x', x'', \ldots, x^{(n)}$ zu finden vermittelst der Gleichung

$$X = X'\frac{\partial x}{\partial x'}+X''\frac{\partial x}{\partial x''}+\cdots+X^{(n)}\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}.$$

Es werde die zwischen den $n+1$ Variabeln zu suchende Relation ausgedrückt durch $\Pi = 0$, so hat man:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x'}+\frac{\partial \Pi}{\partial x'} &= 0,\\
\frac{\partial \Pi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x''}+\frac{\partial \Pi}{\partial x''} &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\frac{\partial \Pi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}}+\frac{\partial \Pi}{\partial x^{(n)}} &= 0,
\end{aligned}$$

wodurch die gegebene Gleichung sich verwandelt in:

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial x}X+\frac{\partial \Pi}{\partial x'}X'+\frac{\partial \Pi}{\partial x''}X''+\cdots+\frac{\partial \Pi}{\partial x^{(n)}}X^{(n)},$$

welcher Gleichung, wie wir gesehen haben, Genüge geschieht, wenn man für Π irgend eine Function von $F_1, F_2, \ldots, F_n$ setzt.

Ist also eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$X = \frac{\partial x}{\partial x'} X' + \frac{\partial x}{\partial x''} X'' + \cdots + \frac{\partial x}{\partial x^{(n)}} X^{(n)}$$

gegeben, so integrire man die Gleichungen:

$$dx : dx' : dx'' : \ldots : dx^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)}.$$

Ist das System der n endlichen Integralgleichungen derselben

$$F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad \ldots, \quad F_n = C_n,$$

wo $C_1, C_2, \ldots, C_n$ die willkürlichen Constanten bedeuten, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ aber diese nicht enthalten, und nennt man Π irgend eine Function von $F_1, F_2, \ldots, F_n$, so wird $\Pi = 0$ das gesuchte Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung.

5.

Wenn der Gleichung

$$X = \frac{\partial x}{\partial x'} X' + \frac{\partial x}{\partial x''} X'' + \cdots + \frac{\partial x}{\partial x^{(n)}} X^{(n)}$$

durch irgend eine Gleichung oder Relation zwischen den n Functionen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ Genüge geschieht: so kann man sagen, dass die Gleichungen

$$dx : dx' : dx'' : \ldots : dx^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)}$$

durch irgend n Relationen zwischen jenen Functionen integrirt werden. Denn aus n Relationen zwischen n Grössen werden diese Constanten gleich, und die Willkürlichkeit der Relationen reducirt sich auf eine blosse Willkürlichkeit der Constanten. Es zeigt sich nun hier eine Lücke. Man kann nämlich nach demjenigen System von Differentialgleichungen fragen, welches durch irgend zwei, drei oder überhaupt m Relationen zwischen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ integrirt wird, wo m zwischen 1 und n liegt. Diese Lücke wird ausgefüllt durch folgendes allgemeine Theorem, welches zu gleicher Zeit auch die beiden bisher behandelten extremen Fälle, wo $m = 1$ und $m = n$ ist, umfasst.

Theorem. „Es seien $F_1, F_2, \ldots, F_n$ solche Functionen der Variabeln $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}$, welche, für F gesetzt, die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} X + \frac{\partial F}{\partial x'} X' + \frac{\partial F}{\partial x''} X'' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} X^{(n)} = 0$$

identisch erfüllen, oder welche, willkürlichen Constanten gleich gesetzt, die Gleichungen

$$dx : dx' : dx'' : \ldots : dx^{(n)} = X : X' : X'' : \ldots : X^{(n)}$$

integriren, so wird das System der m Gleichungen:

$$\begin{aligned}
X &= X^{(m)} \frac{\partial x}{\partial x^{(m)}} + X^{(m+1)} \frac{\partial x}{\partial x^{(m+1)}} + \cdots + X^{(n)} \frac{\partial x}{\partial x^{(n)}},\\
X' &= X^{(m)} \frac{\partial x'}{\partial x^{(m)}} + X^{(m+1)} \frac{\partial x'}{\partial x^{(m+1)}} + \cdots + X^{(n)} \frac{\partial x'}{\partial x^{(n)}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X^{(m-1)} &= X^{(m)} \frac{\partial x^{(m-1)}}{\partial x^{(m)}} + X^{(m+1)} \frac{\partial x^{(m-1)}}{\partial x^{(m+1)}} + \cdots + X^{(n)} \frac{\partial x^{(m-1)}}{\partial x^{(n)}},
\end{aligned}$$

wo $x, x', \ldots, x^{(m-1)}$ als Functionen von $x^{(m)}, x^{(m+1)}, \ldots, x^{(n)}$ betrachtet werden, integrirt durch die m Gleichungen:

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Pi_m = 0,$$

wo $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ willkürliche Functionen von $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sind."

Das Charakteristische dieses Systems von Differentialgleichungen besteht darin, dass in jeder Gleichung nur die partiellen Ableitungen einer Variabeln vorkommen, und dass in allen Gleichungen die Coëfficienten der nach derselben Variabeln genommenen Ableitungen dieselben sind.

6.

Um den Beweis dieses Theorems in aller Allgemeinheit zu geben, wollen wir zuerst die Werthe der partiellen Ableitungen von $x, x', x'', \ldots, x^{(m-1)}$ nach $x^{(m)}, x^{(m+1)}, \ldots, x^{(n)}$ genommen, aus den Gleichungen $\Pi_1 = 0, \Pi_2 = 0, \ldots, \Pi_m = 0$ ableiten. Um die partiellen Ableitungen von x zu finden, bestimme man m Grössen $A, B, C, \ldots M$ dergestalt, dass sie den $m-1$ Gleichungen

$$\begin{aligned}
A \frac{\partial \Pi_1}{\partial x'} + B \frac{\partial \Pi_2}{\partial x'} + \cdots + M \frac{\partial \Pi_m}{\partial x'} &= 0,\\
A \frac{\partial \Pi_1}{\partial x''} + B \frac{\partial \Pi_2}{\partial x''} + \cdots + M \frac{\partial \Pi_m}{\partial x''} &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
A \frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(m-1)}} + B \frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(m-1)}} + \cdots + M \frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(m-1)}} &= 0
\end{aligned}$$

Genüge leisten, wodurch man, wenn man der Kürze wegen

$$A \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + B \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} + \cdots + M \frac{\partial \Pi_m}{\partial x} = N$$

setzt, die Gleichungen

$$N\frac{\partial x}{\partial x^{(m)}} = -\left(A\frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(m)}} + B\frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(m)}} + \cdots + M\frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(m)}}\right),$$
$$N\frac{\partial x}{\partial x^{(m+1)}} = -\left(A\frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(m+1)}} + B\frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(m+1)}} + \cdots + M\frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(m+1)}}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$N\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}} = -\left(A\frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(n)}} + B\frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(n)}} + \cdots + M\frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(n)}}\right)$$

erhält, und ganz auf ähnliche Art finden sich die partiellen Ableitungen von $x', x'', \ldots, x^{(m-1)}$. Nun hat man aber, weil $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ Functionen von $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sind, aus (3.) die identischen Gleichungen:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x}X + \frac{\partial \Pi_1}{\partial x'}X' + \frac{\partial \Pi_1}{\partial x''}X'' + \cdots + \frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(n)}}X^{(n)} = 0,$$
$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial x}X + \frac{\partial \Pi_2}{\partial x'}X' + \frac{\partial \Pi_2}{\partial x''}X'' + \cdots + \frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(n)}}X^{(n)} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial \Pi_m}{\partial x}X + \frac{\partial \Pi_m}{\partial x'}X' + \frac{\partial \Pi_m}{\partial x''}X'' + \cdots + \frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(n)}}X^{(n)} = 0.$$

Multiplicirt man diese respective mit $A, B, C, \ldots, M$ und addirt, so erhält man:

$$\left(A\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + B\frac{\partial \Pi_2}{\partial x} + \cdots + M\frac{\partial \Pi_m}{\partial x}\right)X$$
$$+\left(A\frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(m)}} + B\frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(m)}} + \cdots + M\frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(m)}}\right)X^{(m)}$$
$$+\left(A\frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(m+1)}} + B\frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(m+1)}} + \cdots + M\frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(m+1)}}\right)X^{(m+1)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\left(A\frac{\partial \Pi_1}{\partial x^{(n)}} + B\frac{\partial \Pi_2}{\partial x^{(n)}} + \cdots + M\frac{\partial \Pi_m}{\partial x^{(n)}}\right)X^{(n)} = 0,$$

woraus sich, dem eben Gefundenen zufolge, ergiebt:

$$X = X^{(m)}\frac{\partial x}{\partial x^{(m)}} + X^{(m+1)}\frac{\partial x}{\partial x^{(m+1)}} + \cdots + X^{(n)}\frac{\partial x}{\partial x^{(n)}},$$

welches die erste Gleichung des Theorems ist. Auf dieselbe Art erweisen sich auch die übrigen Gleichungen desselben.

7.

Wir wenden uns jetzt zu den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung überhaupt, da wir bis jetzt nur die linearen betrachtet haben. Lagrange führt für drei Variabeln jede solche Gleichung auf eine lineare partielle Differentialgleichung zwischen vier Variabeln zurück. Die Bestimmung der bei Integration derselben vorkommenden willkürlichen Functionen ist, wie er zeigt, von der Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Variabeln durch das System zweier Gleichungen abhängig. Diese ist immer möglich und erfordert, indem man eine der Variabeln, was erlaubt ist, constant setzt, nur die Integration einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln.

Wir werden im Folgenden sehen, wie aus einer gegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $n+1$ Variabeln immer ein solches System von linearen partiellen Differentialgleichungen abgeleitet werden kann, das sich durch das oben aufgestellte Theorem integriren lässt. Die Bestimmung der willkürlichen Functionen erfordert dann weiter die Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $2n-1$ Variabeln durch das System von n Gleichungen, oder zwischen $2n-2$ Variabeln durch das System von $n-1$ Gleichungen, indem man eine der Variabeln, was erlaubt ist, constant setzt. Wie nun aber diese letztere immer und allgemein geleistet werden kann, ist erst durch die berühmte Pfaffsche Arbeit den Analysten kund geworden. Wenn gleich also im Allgemeinen das Problem immer nur durch diese schliesslich gelöst werden kann, so schien es uns doch der Mühe werth, die Lagrangesche Methode so weit zu verfolgen, wie sie zu führen im Stande ist. —

8.

Es sei x eine Function von $x', x'', \ldots, x^{(n)}$, und man setze

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = p', \quad \frac{\partial x}{\partial x''} = p'', \quad \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial x^{(n)}} = p^{(n)},$$

wo, wenn $\varkappa$ und λ irgend zwei Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, n$ bedeuten, bekanntlich immer $\frac{\partial p^{(\varkappa)}}{\partial x^{(\lambda)}} = \frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial x^{(\varkappa)}}$ ist. Es sei nun die Gleichung

$$0 = \varphi(x, x', x'', \ldots, x^{(n)}, p', p'', \ldots, p^{(n)})$$

zu integriren. Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf x', und setzt

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = p', \quad \frac{\partial p''}{\partial x'} = \frac{\partial p'}{\partial x''}, \quad \frac{\partial p'''}{\partial x'} = \frac{\partial p'}{\partial x'''}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial p^{(n)}}{\partial x'} = \frac{\partial p'}{\partial x^{(n)}},$$

so erhält man:

$$-p'\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{\partial \varphi}{\partial p'}\cdot\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi}{\partial p''}\cdot\frac{\partial p'}{\partial x''} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p^{(n)}}\cdot\frac{\partial p'}{\partial x^{(n)}}.$$