CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05925-1 - C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke: Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften: Volume 2
Edited by Karl Weierstrass
Excerpt
More information

DE

THEOREMATE ABELIANO OBSERVATIO

AUCTORE

C. G. J. JACOBI

PROF. MATH. REGIOM.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 9. p. 99.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05925-1 - C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke: Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften: Volume 2
Edited by Karl Weierstrass
Excerpt
More information

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05925-1 - C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke: Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften: Volume 2
Edited by Karl Weierstrass
Excerpt
More information

DE THEOREMATE ABELIANO OBSERVATIO.

Demonstravit Cl. Abel (Diar. Crell. Vol. III. p. 313 sqq.), designantibus U, V, A, B functiones integras variabilis x, atque $\Pi(x)$ integrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{AB}} = \Pi(x),$$

radices aequationis algebraicae

$$AUU - BVV = 0$$

tales fore, ut summa $\Sigma \pm \Pi(x)$, ad omnes illas radices extensa, a coëfficientibus functionum U, V omnino non pendeat; quod theorema etiam ad casum generaliorem extendit, quo

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{Sdx}{T\sqrt{AB}},$$

designantibus S, T et ipsis functiones quaslibet integras variabilis x. Quippe quo casu demonstravit, summam $\Sigma \pm \Pi(x)$ generaliter expressioni algebraicae et logarithmicae coëfficientium functionum U, V aequalem fore. Signa $\pm$ singulis $\Pi(x)$ in summa assignata praefigenda eadem esse debent atque valorum expressionis AUV.

Observo, theorema facile extendi ad casum, quo aequatio proposita fit

$$AUU + 2BUV + CVV = 0,$$

designantibus rursus A, B, C, S, T, U, V functiones integras, atque $\Pi(x)$ integrale:

$$\int_0^x \frac{Sdx}{T\sqrt{BB - AC}} = \Pi(x).$$

1*

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05925-1 - C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke: Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften: Volume 2
Edited by Karl Weierstrass
Excerpt
More information

Quo casu, siquidem ponitur $T = x - \alpha$, ad quem casum generalior facile revocatur, theorema Abelianum ita audit.

Theorema.

»Sint A, B, C, S, U, V functiones integrae variabilis x, ponatur $BB - AC = \varphi(x)$, atque integrale

$$\int_0^x \frac{S\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} = \Pi(x),$$

radices aequationis algebraicae

$$AUU + 2BUV + CVV = 0$$

tales erunt, ut summa $\Sigma \pm \Pi(x)$, ad omnes eius radices extensa, sit

$$c + r - L,$$

designante

1) c quantitatem a coëfficientibus functionum U, V independentem;

2) r functionem algebraicam coëfficientium functionum U, V, aequalem coëfficienti termini $\frac{1}{x}$ in evolutione expressionis

$$\frac{S}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \log \frac{AU + BV + V\sqrt{\varphi(x)}}{AU + BV - V\sqrt{\varphi(x)}},$$

evolutione secundum dignitates descendentes ipsius x instituta;

3) L valorem expressionis

$$\frac{S}{\sqrt{\varphi(x)}} \log \frac{AU + BV + V\sqrt{\varphi(x)}}{AU + BV - V\sqrt{\varphi(x)}},$$

posito $x = \alpha$.

Signa $\pm$, quae in summa assignata $\Sigma \pm \Pi(x)$ singulis $\Pi(x)$ praefigenda sunt, eadem sunt atque valorum expressionis $\frac{AU + BV}{V}$.«

Posito $B = 0$, hoc theorema in Abelianum abit; demonstrationi supersedeo, cum pro utroque eadem sit.

Regiomonti, 14. Maii 1832.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05925-1 - C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke: Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften: Volume 2
Edited by Karl Weierstrass
Excerpt
More information

CONSIDERATIONES GENERALES

DE

TRANSCENDENTIBUS ABELIANIS

AUCTORE

C. G. J. JACOBI

PROF. MATH. REGIOM.

Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 9. p. 394—403.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05925-1 - C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke: Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften: Volume 2
Edited by Karl Weierstrass
Excerpt
More information

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05925-1 - C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke: Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften: Volume 2
Edited by Karl Weierstrass
Excerpt
More information

CONSIDERATIONES GENERALES DE TRANSCENDENTIBUS ABELIANIS.

1.

Denotante **X** functionem variabilis x rationalem integram quarti ordinis, demonstravit olim Eulerus, transcendentes huiusmodi:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x)$$

gaudere proprietate singulari, ut posito

$$\Pi(x)+\Pi(y) = \Pi(a),$$

ipsa a e x et y algebraice inveniatur. Quo theoremate, advocata transformatione transcendentis $\Pi(x)$ a Cl. Landen detecta, superstruxit Cl. Legendre amplam theoriam, quam hodie nomine *theoriae functionum ellipticarum* usurpamus. Neque tamen harum transcendentium indoles atque natura plane pernosci poterat, considerando hanc solam transcendentem $\Pi(x)$ sive etiam generaliorem hanc

$$\int_0^x \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

in qua $f(x)$ functio ipsius x rationalis est, sed considerari debuit functio, cuius ipsa $\Pi(x)$ inversa est, sive *considerari debuit intervallum x ut functio integralis $\Pi(x)$.*

Etenim si analogiam functionum trigonometricarum respicimus, in quas casu speciali functiones ellipticae abeunt, etiam hic videmus, posito

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-xx}},$$

considerari ab analystis intervallum x tamquam functionem integralis u, cui nomen *sinus* tribuunt. Quam functionem scimus proprietatibus gravissimis gaudere, quae eius usum et applicationem per totam analysin frequentissimam

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05925-1 - C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke: Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften: Volume 2
Edited by Karl Weierstrass
Excerpt
More information

reddunt. Quippe quae, ut de aliis taceam, pro quolibet valore argumenti u valorem unicum ac determinatum habet; evolvi potest in seriem secundum dignitates ipsius u progredientem, quae pro omnibus argumenti valoribus et realibus et imaginariis convergit, discerpi potest in factores lineares, qui determinantur valoribus ipsius u, pro quibus functio evanescit; denique *gaudet illa proprietatibus omnibus functionis ipsius u rationalis integrae.* E contra functionem u considerant analystae tantum ut inversam functionis $x = \sin(u)$, dicentes eam esse, cuius *sinus* $= x$, aut scribentes $u =$ *arcus sinus* x; neque ea functio ullo modo evolvi potest in seriem semper convergentem, neque determinata est, sed numerum valorum infinitum habet, quippe cuius eadem est natura atque *radicis aequationis algebraicae ordinis infiniti*, $x = \sin(u)$. Unde nec nomen nec signum peculiare ei tribuere idoneum putabatur.

Eodem plane modo comparatum est de transcendentibus ellipticis sive de transcendentibus $\Pi(x) = u$, quoties X ascendit ordinem quartum. Etiam hoc casu functio $\Pi(x)$ nullo modo evolvi potest in seriem semper convergentem, neque valorem determinatum habet, sed numerum adeo valorum dupliciter infinitum. Contra vero, quod a nobis in *Fundamentis novis theoriae functionum ellipticarum* factum est, ubi exhibita transcendente $\Pi(x)$ sub forma simpliciore, ad quam Cl. Legendre eam revocavit:

$$u = \Pi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)(1-k^2xx)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

consideramus *amplitudinem* φ tamquam functionem integralis u: functio x quam hunc in modum exhibemus:

$$x = \sin\operatorname{am}(u),$$

gaudet proprietatibus omnibus functionis rationalis fractae. Quippe spectari potest functio illa tamquam fractio, cuius et denominator et numerator sunt functiones rationales integrae ordinis infiniti, quas et ipsas ut transcendentes novas valde memorabiles in analysin introduxi. Evolvi possunt functiones illae in series rapidissime convergentes pro quolibet argumenti u valore sive reali sive imaginario; discerpi possunt in factores lineares, qui facile determinantur valoribus ipsius u, pro quibus functio $x = \sin\operatorname{am}(u)$ aut evanescit aut in infinitum abit. Ipsa tandem functio $x = \sin\operatorname{am}(u)$, ut de aliis taceam, gaudet proprietate, qua ante omnes transcendentes hactenus notas excellit. *periodo duplici et reali et ima-*

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05925-1 - C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke: Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften: Volume 2
Edited by Karl Weierstrass
Excerpt
More information

ginaria. Quemadmodum enim functio trigonometrica $\sin(u)$ periodo reali gaudet, ut cuius valores, crescente u, inde a $u = 2\pi$ eodem ordine redeunt, sive cuius valores mutato u in $u + 2\pi$ immutati manent; quemadmodum functio exponentialis e^u periodum imaginariam habet, ut quae mutato u in $u + 2\pi\sqrt{-1}$ et ipsa valorem non mutat: ita, ex observatione a nobismet ipsis et Cl. Abel facta, functio elliptica $\sin\text{am}(u)$ valorem non mutat, mutato u et in $u + 4K$ et in $u + 2K'\sqrt{-1}$, designantibus K, K' integralia definita:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Quibus de causis nos et Cl. Abel arbitrati sumus, artem analyticam magna incrementa capturam esse, introducta hac nova functione $x = \sin\text{am}(u)$, cuius ipsa transcendens $u = \Pi(x)$ est inversa sive una aliqua e radicibus aequationis $x = \sin\text{am}(u)$, quarum numerus dupliciter infinitus.

2.

Theorema Eulerianum, de quo diximus, a Cl. Abel mirum in modum amplificatum est, videlicet ad casus omnes extensum, quibus functio $\mathbf{X}$, quae in integralibus ellipticis tantum ad ordinem quartum ascendebat, functio est quaelibet integra rationalis. Ut a casu simplicissimo post eum, de quo supra egimus, ordiamur, designante X functionem ipsius x integram rationalem ordinis quinti aut sexti, sit

$$\int_0^x \frac{(A + A_1 x)\,dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x),$$

proposita aequatione:

$$\Pi(x) + \Pi(y) + \Pi(z) = \Pi(a) + \Pi(b),$$

demonstravit Cl. Abel, ipsas a, b e quantitatibus x, y, z *algebraice* determinari posse.

Generaliter autem, *designante* $f(x) = X$ *functionem ipsius* x *integram rationalem ordinis cuiuslibet* $2m^{ti}$ *sive* $(2m-1)^{ti}$, *posito*

$$\int_0^x \frac{(A + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{m-2} x^{m-2})\,dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x),$$

demonstratum est a Cl. Abel, dato numero m *valorum variabilis* x*:*

$$x,\ x_1,\ x\ ,\ldots,\ x_{m-1},$$

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05925-1 - C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke: Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften: Volume 2
Edited by Karl Weierstrass
Excerpt
More information

ex illis algebraice determinari posse $m-1$ *quantitates*

$$a,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{m-2}$$

tales, ut satisfaciant aequationi transcendentali:

$$\Pi(x)+\Pi(x_1)+\Pi(x_2)+\cdots+\Pi(x_{m-1}) = \Pi(a)+\Pi(a_1)+\cdots+\Pi(a_{m-2}).$$

Et invenit Cl. Abel ipsas $a,\ a_1,\ldots,\ a_{m-2}$ *ut radices aequationis algebraicae ordinis* $(m-1)^{ti}$, *cuius coefficientes singuli per* $x,\ x_1,\ldots,\ x_{m-1}$ *atque* $\sqrt{\mathrm{X}},\ \sqrt{\mathrm{X}_1},\ldots,\ \sqrt{\mathrm{X}_{m-1}}$ *rationaliter exhibentur, siquidem* $\mathrm{X}_1=f(x_1)$, $\mathrm{X}_2=f(x_2)$, *etc.*

De quo theoremate facile etiam sequitur, dato numero quolibet valorum ipsius x, summam transcendentium $\Pi(x)$, quae ad valores illos datos pertinent, semper exprimi posse per numerum $m-1$ transcendentium $\Pi(x)$, quae pertinent ad valores ipsius x e datis algebraice determinabiles.

Theoremati antecedenti ut monumento pulcherrimo ingenii admirabilis morte praematura abrepti *theorematis Abeliani* nomen imponere placet. Ipsas etiam transcendentes $\Pi(x)$ casibus, quibus X ultra ordinem quartum ascendit, *transcendentes Abelianas* vocare lubet, ut quas ante illum nemo consideraverat. Quas Cl. Legendre etiam idoneo nomine *hyperellipticas* appellat (fonctions ultra-elliptiques) *).

3.

Casu quo $u=\Pi(x)$ est integrale ellipticum sive X tantum ad ordinem quartum ascendit, docet theorema Eulerianum, siquidem vice versa $x=\lambda(u)$, functionem $\lambda(u+u')$, cuius argumentum est binomen $u+u'$, exhiberi algebraice per functiones $\lambda(u)$, $\lambda(u')$, quae ad singula nomina u, u' pertinent, sicuti de functionibus trigonometricis in elementis proponitur. Iam rogo, *et quaenam sint casu generaliori functiones illae, quarum inversae sunt transcendentes Abelianae, et quomodo de hisce exhibitum audiat theorema Abelianum.*

*) Cl. Abel commentationem *de proprietatibus singularibus integralium functionum algebraicarum* iam a. 1826 Academiae Parisiensi exhibuit, quam Illustris Academia commentationibus *eruditorum alienorum* inserendam decrevit. Quarum tamen publicatio cum in dies proferatur, valde optandum esset, ut Illustri Academiae inter ipsas eius commentationes eam exhibere placeat, vel si forte usus vetat, ut parti certe historicae commentationum inseratur. Quamquam pietatis quodammodo foret, honorem et insuetum tribuere memoriae iuvenis eximii, cui ipsos honores Academicos praeclusit fatum irrevocabile. Quod, dum Parisiis agebam, a Cl. Fourier precibus meis concessum, utinam, mortuo viro excellentissimo, illustris eius successor ratum facere velit.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org