Démonstration géométrique d'un théorème relatif à l'attraction d'une couche ellipsoïdique sur un point extérieur.

Crelle's Journal Band XII. S. 141—143.

Avec 1 figure (Table I).

Démonstration géométrique d'un théorème relatif à l'attraction d'une couche ellipsoïdique sur un point extérieur.

Le numéro du 12. Oct. 1833 du Journal „*l'Institut*" contient l'extrait d'un mémoire sur l'attraction d'un ellipsoïde homogène que M. *Poisson* a lu à l'Académie des sciences de Paris. On y trouve l'énoncé d'un théorème remarquable par sa simplicité et qui consiste en ce „qu'une couche infiniment mince et comprise entre deux ellipsoïdes concentriques, semblables et semblablement placés exerce sur un point extérieur une attraction, dirigée suivant l'axe du cône circonscrit à la couche et ayant pour sommet le point attiré" C'est ce théorème que nous allons démontrer par des considérations géométriques fort simples.

Lemme.

„L'ellipse $ABCD$ (Tab. I, fig. 1) étant touchée par les côtés PA, PB de l'angle APB, si l'on divise cet angle en deux parties égales par la droite PQ qui coupe en Q la corde de contact AB, polaire du point P, je dis que PQ formera des angles égaux avec les droites PC, PD qui joignent le point P aux deux extrémités d'une corde quelconque passant par le point Q."

Démonstration. Si l'on mène PR perpendiculairement à PQ, on sait que PR, PA, PQ, PB seront quatre droites harmoniques. Par conséquent les quatre points R, A, Q, B de même que les suivants P, G, Q, F sont harmoniques, et PR est la polaire du point Q; il suit de là que D, Q, C, E sont quatre points harmoniques et par conséquent PD, PQ, PC, PE quatre droites harmoniques, et comme les droites conjuguées PE et PQ sont perpendiculaires entre elles, on en conclut qu'elles doivent partager en deux parties égales l'angle formé par les droites conjuguées PD, PC de sorte que

$$DPQ = CPQ$$

c. q. f. d.*).

Théorème.

„L'attraction, exercée par une couche homogène infiniment mince et comprise entre deux ellipsoïdes concentriques, semblables et semblablement placés sur un point extérieur P, est dirigée suivant l'axe du cône qui a son centre au point attiré et qui enveloppe la couche attirante."

Démonstration. Concevons sur la surface extérieure de la couche un élément infiniment petit, et soit C un point de cet élément. Le plan déterminé par ce point et par l'axe du cône circonscrit à la surface extérieure coupera cette surface en une ellipse $ACBD$ qui sera touchée par les deux arêtes PA, PB du cône comprises dans ce plan. Il est évident en même temps que la droite AB est l'intersection du plan en question et de celui qui contient la courbe de contact du cône et de la surface extérieure, et que Q est le point de rencontre de ce dernier plan et de l'axe du cône. Comme l'axe PQ divise en deux parties égales l'angle APB formé par les deux arêtes, comprises dans un même plan avec lui, on conclura en vertu du lemme précédent que les angles CPQ, DPQ sont égaux. Si l'on conçoit maintenant une droite mobile autour du point Q et parcourant le contour de l'élément de surface précédemment nommé, cette droite déterminera dans la couche ellipsoïdique deux éléments de volume situés de part et d'autre du point Q et dont nous allons considérer l'attraction d'abord sur le point intérieur Q et ensuite sur le point extérieur P. Quant à l'attraction exercée par ces éléments sur le point Q, on sait qu'elles sont égales et opposées, et c'est sur la destruction mutuelle des attractions exercées par deux éléments ainsi opposés qu'est fondé l'équilibre d'un point quelconque dans l'intérieur de la couche ellipsoïdique, comme *Mac-Laurin* l'a fait voir par la simple géométrie, et comme *Lagrange* l'a confirmé depuis par l'analyse. En supposant ce résultat, on en conclut que les deux éléments de volume que nous désignons pour un instant par (C) et (D) vérifient la proportion

$$(C):(D) = (QC)^2:(QD)^2.$$

*) On trouve les démonstrations des propriétés sur lesquelles nous nous appuyons ici dans les ouvrages suivants: *La Perspective* de *Lambert*; *les Mémoires* de M. *Brianchon*; *le traité des propriétés projectives* par M. *Poncelet*; ou mes deux ouvrages intitulés: „*Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*" (Cf. Bd. I. S. 229 dieser Ausgabe) et „*Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und Eines festen Kreises*" (Cf. Bd. I. S. 461 dieser Ausgabe).

Il suit d'un autre côté de l'égalité des angles CPQ et DPQ, précédemment établie, qu'on a

$$QC:QD = PC:PD$$

et par conséquent, en comparant:

$$(C):(D) = (PC)^2:(PD)^2,$$

proportion qui prouve que les deux éléments attirent également le point P, et partant que la résultante de ces deux actions est dirigée suivant l'axe PQ. Ce résultat étant applicable a tous les éléments de la couche qui se correspondent deux à deux, le théorème énoncé se trouve rigoureusement établi.

La démonstration précédente fournit en outre le corollaire suivant:

„Un plan quelconque passant par le point Q partage la couche ellipsoïdique en deux parties qui exercent des attractions égales sur le point P."

On peut également tirer des considérations précédentes plusieurs vérités géométriques, dont je me contenterai d'énoncer une seule:

„Si par l'ellipse, intersection de l'ellipsoïde et d'un plan quelconque passant par le point Q, l'on conçoit un cône ayant son sommet au point P, l'axe de ce cône coïncidera avec la droite PQ."

Berlin, au mois de Janvier 1834.

Cambridge University Press
978-1-108-05922-0 - Jacob Steiner's Gesammelte Werke: Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften: Volume 2
Edited by Karl Weierstrass
Excerpt
More information

Ein neuer Satz über die Primzahlen.

Crelle's Journal Band XIII. S. 356—360.

Ein neuer Satz über die Primzahlen.

1. Der Satz, welcher hier bewiesen werden soll, lautet, wie folgt:

„Hat man irgend eine Primzahl p und $p-1$ beliebige andere Zahlen, welche durch p nicht theilbar sind, sondern nach irgend einer Ordnung die verschiedenen Reste $1, 2, 3, \ldots p-1$ geben, oder auch, was im Grunde auf dasselbe hinauskommt, nach irgend einer Ordnung genommen, diese Reste selbst sind, combinirt man von diesen Zahlen irgend eine Anzahl n zur $(p-n)^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung aber ohne Versetzung und multiplicirt die Zahlen jeder Complexion in einander, so ist die Summe aller dieser Producte immer durch p theilbar, die Zahl n mag sein, von 2 bis $p-1$ inclusive, welche man will.“

Beweis. Wird jeder Theil der identischen Gleichung

$$x = (x-a_1)+a_1$$

mit x multiplicirt, nämlich der Theil links mit x, das erste Glied rechts mit $(x-a_2)+a_2$ und das zweite mit $(x-a_1)+a_1$, so erhält man nach gehöriger Ordnung

$$x^2 = (x-a_1)(x-a_2)+(a_1+a_2)(x-a_1)+a_1^2.$$

Werden die Glieder der letzten Gleichung ähnlicher Weise beziehlich mit

$$x = (x-a_3)+a_3 = (x-a_2)+a_2 = (x-a_1)+a_1$$

multiplicirt, so kommt

$$x^3 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)+(a_1+a_2+a_3)(x-a_1)(x-a_2)$$
$$+(a_1^2+a_1 a_2+a_2^2)(x-a_1)+a_1^3.$$

Gleicherweise gelangt man zu der Gleichung

$$\begin{aligned} x^4 = {} & (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4) \\ & + (a_1+a_2+a_3+a_4)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \\ & + (a_1^2+a_1 a_2+a_1 a_3+a_2^2+a_2 a_3+a_3^2)(x-a_1)(x-a_2) \\ & + (a_1^3+a_1^2 a_2+a_1 a_2^2+a_2^3)(x-a_1)+a_1^4, \end{aligned}$$

und durch Wiederholung desselben Verfahrens zu der allgemeinen Gleichung

$$\begin{aligned} x^{p-1} = {} & (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{p-1}) \\ & + (a_1+a_2+\cdots+a_{p-1})(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{p-2}) \\ & + (a_1^2+a_1 a_2+\cdots+a_1 a_{p-2}+a_2^2+a_2 a_3+\cdots \\ & \qquad \cdots+a_{p-2}^2)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{p-3}) \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + (a_1^{p-2}+a_1^{p-3} a_2+a_1^{p-4} a_2^2+\cdots+a_2^{p-2})(x-a_1)+a_1^{p-1}, \end{aligned}$$

oder in einfachen Zeichen

$$(1)\quad x^{p-1} = X_{p-1}+A_1X_{p-2}+A_2X_{p-3}+A_3X_{p-4}+\cdots+A_{p-2}X_1+A_{p-1}.$$

Das Gesetz, wonach die Glieder dieser Gleichung gebildet werden, fällt in die Augen. Nämlich der Coefficient A_1 des zweiten Gliedes rechts ist die Summe der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{p-1}$; der Coefficient A_2 des dritten Gliedes ist die Summe der Producte, die entstehen, wenn man die $p-2$ Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{p-2}$ mit Wiederholung aber ohne Versetzung zu zweien combinirt und in einander multiplicirt; u. s. w.

Wird nun angenommen, p sei irgend eine Primzahl, und die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{p-1}$ seien nicht durch p theilbar und lassen, durch p dividirt, verschiedene Reste, also, nach irgend einer Ordnung genommen, die Reste $1, 2, 3, \ldots p-1$; und wird ferner auch die willkürliche Zahl x als nicht durch p theilbar vorausgesetzt, so ist, wenn man das letzte Glied rechts auf die linke Seite bringt, die Differenz

$$x^{p-1}-a_1^{p-1}$$

vermöge des *Fermat*'schen Satzes durch p theilbar. Giebt man nun dem x für einen Augenblick einen solchen Werth, dass $x-a_2$ durch p theilbar wird, so sind alle Glieder rechts, welche $x-a_2$ zum Factor haben, durch p theilbar; daher muss auch das nunmehrige letzte Glied

$$A_{p-2}X_1 = (a_1^{p-2}+a_1^{p-3}a_2+a_1^{p-4}a_2^2+\cdots+a_2^{p-2})(x-a_1)$$

durch p theilbar sein; und zwar muss es nothwendig der erste Factor dieses Gliedes sein, da vermöge der Voraussetzung der andere, $x-a_1$, es nicht sein kann.

Bringt man nun ferner auch dieses letzte Glied $A_{p-2}X_1$ auf die linke Seite der Gleichung, so ist der erste Theil derselben durch p theilbar; und giebt man sodann dem x einen solchen besondern Werth, dass der Factor $x-a_3$ durch p theilbar wird, so folgt ähnlicherweise wie vorhin, dass nun auch das gegenwärtige letzte Glied rechts, $A_{p-3}X_2$ durch p theilbar sein muss, und zwar, da von den zwei Factoren $x-a_1$, $x-a_2$ jetzt keiner durch p theilbar sein kann, dass sein Coefficient, nämlich

$$A_{p-3} = a_1^{p-3}+a_1^{p-4}a_2+a_1^{p-4}a_3+a_1^{p-5}a_2^2+\cdots+a_2a_3^{p-4}+a_3^{p-3},$$

durch p theilbar ist.

Gleicherweise folgert man, dass jeder der übrigen Coefficienten $A_{p-4}, A_{p-5}, \ldots A_2, A_1$ durch p theilbar ist, wodurch die Richtigkeit des oben stehenden Satzes dargethan wird.

Um den Satz durch ein Beispiel anschaulich zu machen, sei

$$p=7,\quad n=3 \quad\text{und}\quad a_1=5,\quad a_2=4,\quad a_3=3,$$

also

$$p-n=7-3=4,$$

so sind die Zahlen 5, 4, 3 zur 4ten Classe mit Wiederholung aber ohne Versetzung zu combiniren, sodann in einander zu multipliciren und die