Cambridge University Press
978-1-108-05921-3 - Jacob Steiner's Gesammelte Werke: Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften: Volume 1
Edited by Karl Weierstrass
Excerpt
More information

Einige geometrische Sätze.

Crelle's Journal Band I. S. 38—52.

Hierzu Taf. I und II Fig. 1—6.

Einige geometrische Sätze.

1.

In den Annalen der Mathematik von Gergonne wird der folgende Satz bewiesen:

„Wenn die drei geraden Linien Aa, Bb, Cc (Fig. 1), welche die Ecken zweier in einerlei Ebene liegenden Dreiecke ABC, abc paarweise verbinden, sich in einem und demselben Punct S treffen, so liegen die drei Schneidepuncte $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, in welchen die entsprechenden Seiten AB und ab, BC und bc, CA und ca sich paarweise kreuzen, in einer geraden Linie." Und umgekehrt:

„Liegen die Schneidepuncte $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, in welchen die Seiten zweier in einerlei Ebene liegenden Dreiecke ABC, abc sich paarweise kreuzen, in einer geraden Linie: so treffen sich die drei geraden Linien Aa, Bb, Cc, welche die entsprechenden Eckpuncte der beiden Dreiecke paarweise verbinden, in einem und demselben Puncte S."

2.

Es findet ein analoger Satz im Raume Statt, aus welchem sich verschiedene interessante Folgerungen ziehen lassen, nämlich folgender Satz:

„Treffen die vier geraden Linien Aa, Bb, Cc, Dd (Fig. 2), welche die Ecken zweier beliebigen viereckigen Körper $ABCD$, $abcd$ paarweise verbinden, sich in einem und demselben Puncte S: so liegen die vier Linien, in welchen sich die entsprechenden Seitenflächen der beiden Körper paarweise schneiden, oder die sechs Puncte $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$, in welchen sich die entsprechenden Kanten (AB und ab, AC und ac, AD und ad, BC und bc, BD und bd, CD und cd) schneiden, in einer und derselben Ebene (E)." Und umgekehrt:

„Liegen die vier geraden Linien, in welchen sich die Seitenflächen irgend zweier viereckigen Körper paarweise schneiden, zusammen in einerlei Ebene (E): so treffen sich die vier geraden Linien Aa, Bb, Cc, Dd, welche die entsprechenden (d. h. die den gepaarten Seitenflächen gegenüber stehenden) Ecken der Körper paarweise verbinden, in einem und demselben Puncte S."

Denn im ersten Falle dieses Satzes folgt aus der Voraussetzung: dass die Ecken der beiden Körper paarweise mit dem Puncte S in geraden Linien liegen, unmittelbar, dass je zwei entsprechende Kanten der beiden gegebenen Körper mit dem Puncte S in einer Ebene liegen. So liegen z. B. die beiden Kanten AB, ab offenbar in der Ebene ASB. Daher treffen zwei solche Kanten sich in einem Puncte $\alpha\beta$, und mithin schneiden sich die entsprechenden Kanten der beiden Körper in den sechs Puncten $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$. In je zwei entsprechenden Seitenflächen (z. B. ABC, abc) liegen drei Paare entsprechender Kanten (AB und ab, BC und bc, CA und ca); daher liegen die drei Durchschnittspuncte ($\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$) dieser drei Kantenpaare nothwendig in der Durchschnittslinie der beiden Seitenflächen, mithin in einer geraden Linie. Da es aber vier Paare entsprechender Seitenflächen giebt, so liegen von den sechs Durchschnittspuncten der sechs Paare entsprechender Kanten, vier Mal drei in einer geraden Linie, woraus folgt, dass diese sechs Puncte zusammen in einer und derselben Ebene (E) liegen.

Der Beweis für den zweiten Fall des obigen Satzes ergiebt sich hieraus von selbst. Ferner wird man bemerken, dass der Beweis des Satzes No. 1 unmittelbar aus dem vorliegenden folgt, wenn man annimmt: die Seitenflächen ABC und abc der beiden Körper liegen in einerlei Ebene.

3.

Da die Ebene (E), in welcher die sechs Schneidepuncte der sechs Paare entsprechender Kanten, oder die vier Durchschnittslinien der vier Paare entsprechender Seitenflächen der beiden Körper liegen, durch die Durchschnittslinie ($\beta\gamma\delta$) der beiden Seitenflächen BCD, bcd und durch den Durchschnittspunct ($\alpha\beta$) der beiden Kanten AB, ab bestimmt ist, so behält sie, in Bezug auf die beiden Körper, dieselbe Eigenschaft, wenn auch die übrigen Eckpuncte D, C, d, c, ohne aus den zugehörigen Ebenen BCD, bcd herauszutreten, und ohne aufzuhören, paarweise mit dem Puncte S in geraden Linien (SdD, ScC) zu liegen, ihre Lage beliebig ändern. Daraus folgt Nachstehendes:

„Sind irgend zwei Ebenen bcd, BCD und drei beliebige Puncte S, a, A, die in einer geraden Linie liegen, gegeben, und man zieht aus einem der drei Puncte, z. B. aus S, eine willkürliche Linie SdD, welche die beiden Ebenen in den Puncten d und D schneidet, und verbindet diese beiden Punkte d und D mit den beiden übrigen gegebenen Puncten a, A durch die Linien da, DA: so ist der Ort des Durchschnittspunctes ($\alpha\delta$) dieser beiden Linien eine bestimmte Ebene (E), welche durch die Durchschnittslinie ($\beta\gamma\delta$) der beiden gegebenen Ebenen geht." Und umgekehrt:

„Sind drei beliebige Ebenen BCD, bcd und (E), die sich in einer geraden Linie $(\beta\gamma\delta)$ schneiden, nebst zwei beliebigen Puncten A, a gegeben, und man zieht aus einem willkürlichen Puncte $(\alpha\delta)$ der einen Ebene (E), durch die beiden gegebenen Puncte zwei Linien, welche die beiden übrigen Ebenen in den Puncten D, d schneiden: so liegen diese beiden Puncte D, d immer mit einem und demselben Puncte S in einer geraden Linie, und es liegt dieser Punct S zugleich mit den beiden gegebenen Puncten A, a in einer geraden Linie; oder:

„Nimmt man in der Ebene (E) eine willkürliche Linie $(\alpha\gamma\delta)$ an, legt durch dieselbe und durch die beiden gegebenen Puncte (A, a) zwei Ebenen, welche die beiden übrigen gegebenen Ebenen BCD, bcd, in den Linien DC, dc schneiden: so liegen diese beiden Durchschnittslinien in einer Ebene, und diese Ebene geht immer durch einen bestimmten Punct S, welcher mit den beiden gegebenen Puncten (A, a) in einer geraden Linie liegt."

4.

Hieraus folgt weiter, dass der obige Satz No. 2 noch allgemeiner Statt findet, nämlich, dass er nicht blos für zwei viereckige Körper, sondern für je zwei vielseitige Pyramiden gilt; man schliesst hieraus folgenden Satz:

„Treffen die geraden Linien, welche die Eckpuncte irgend zweier n seitigen Pyramiden paarweise verbinden, in einem und demselben Puncte S zusammen, so liegen die Durchschnittslinien der entsprechenden Seitenflächen der beiden Körper, so wie auch die Durchschnittspuncte der entsprechenden Kanten, (diese Durchschnittspuncte liegen in jenen Durchschnittslinien) zusammen in einer und derselben Ebene." Und umgekehrt:

„Liegen die Durchschnittslinien, in welchen die Seitenflächen zweier n seitigen Pyramiden, paarweise genommen, einander schneiden, oder liegen die Durchschnittspuncte, in welchen die paarweise genommenen Kanten zweier n seitigen Pyramiden einander schneiden, zusammen in einer und derselben Ebene: so treffen sich die geraden Linien, welche die entsprechenden Ecken der beiden Körper paarweise verbinden, in einem und demselben Puncte S."

5.

Man kann die obigen Sätze auch mit anderen Worten wie folgt ausdrücken:

„Sind A, a die Scheitel zweier beliebigen gegebenen Kegel (vom n^{ten} Grade), deren Grundflächen in den Ebenen BCD, bcd liegen, und liegen die beiden Grundflächen ausserdem in einem Kegel, dessen Scheitel S mit den Scheiteln A, a der gegebenen Kegel in einer geraden Linie liegt: so schneiden sich die beiden gegebenen Kegel (über ihre Grundflächen hinaus verlängert, wenn es erforderlich ist) in einer ebenen Curve, deren Ebene (E) durch die Durchschnittslinie $(\beta\gamma\delta)$ der Grundflächen der beiden gegebenen Kegel geht." Oder was dasselbe ist:

„Liegen die Scheitel S, a, A dreier Kegel (n^{ten} Grades) in einer geraden Linie SaA, und schneiden irgend zwei dieser Kegel den dritten in zwei ebenen Curven: so schneiden auch diese beiden Kegel einander in einer ebenen Curve, und die Ebenen dieser drei Durchschnitts-Curven schneiden sich zusammen in einer und derselben geraden Linie.“ Und umgekehrt:

„Schneiden sich die Mantelflächen irgend zweier gegebenen Kegel (n^{ten} Grades) in einer ebenen Curve, deren Ebene zugleich durch die Durchschnittslinie der beiden Grundflächen der Kegel geht: so liegen die beiden Grundflächen der gegebenen Kegel zusammen in einem dritten Kegel, dessen Scheitel mit den Scheiteln der beiden gegebenen Kegel in einer geraden Linie liegt.“ Oder was auf dasselbe hinauskommt:

„Schneiden irgend zwei gegebene Kegel (A, a) einander in einer ebenen Curve, und man nimmt in der Ebene (E) dieser Curve eine willkürliche Linie ($\beta\gamma\delta$) an, legt durch diese Linie zwei willkürliche Ebenen, welche die gegebenen Kegel respective in zwei ebenen Curven schneiden: so liegen diese beiden letzten Curven immer zusammen in einem Kegel, dessen Scheitel S stets in der geraden Linie (Aa) liegt, welche durch die Scheitel der beiden gegebenen Kegel geht“.

6.

Da man einen Cylinder als einen Kegel ansehen kann, dessen Scheitel in unendlicher Entfernung liegt, so gelten die obigen Sätze in gleichem Sinne auch für Cylinder und lauten in diesem speziellen Falle wie folgt:

„Sind die Kanten dreier gegebenen Cylinder (n^{ten} Grades) mit einer Ebene parallel, und schneidet jeder von zwei derselben den dritten in einer ebenen Curve: so schneiden sich auch diese beiden Cylinder in einer ebenen Curve, und es schneiden sich die Ebenen dieser drei genannten Curven in einer und derselben geraden Linie.“ Und umgekehrt:

„Schneiden zwei beliebige Cylinder (n^{ten} Grades) einander in einer ebenen Curve, und man nimmt in der Ebene (E) dieser Curve eine willkürliche Linie ($\beta\gamma\delta$) an, und legt durch diese Linie zwei willkürliche Ebenen, welche die gegebenen Cylinder respective in zwei ebenen Curven schneiden: so liegen diese beiden letztgenannten Curven zusammen in einem dritten Cylinder und die Kanten desselben, nebst den Kanten der beiden gegebenen Cylinder, sind stets mit einer und derselben Ebene parallel.“

7.

Ein anderer besonderer Fall ist derjenige, wo man die vorhin betrachteten Kegel auf den zweiten Grad beschränkt. In diesem Falle finden bei den obigen Betrachtungen noch verschiedene interessante Umstände Statt.

Zuerst kann nämlich bemerkt werden:

I. „Berührt von zwei Kegeln vom zweiten Grade jeder beide Flächen eines und desselben Flächenwinkels: so schneiden diese beiden Kegel einander in zwei ebenen Curven (zweiten Grades)."

Denn man stelle sich zwei Kegel A, a und zwei Ebenen E, e von denen jede jene beiden Kegel berührt, vor: so berührt z. B. die Ebene E jeden der beiden Kegel A, a in einer geraden Linie; und in dem Puncte P, in welchem diese beiden Linien sich schneiden, berührt sie beide Kegel zugleich: eben so berührt die andere Ebene e beide Kegel zugleich, in einem Puncte p. Man denke sich ferner durch diese beiden Puncte P, p und durch irgend einen Punct q, welcher im Durchschnitte der beiden Kegelflächen liegt, eine Ebene E_1 gelegt: so wird diese Ebene E_1 von den beiden Kegelflächen A, a in zwei Curven zweiten Grades C, c, und von den beiden Ebenen E, e in zwei geraden Linien L, l geschnitten, und es berührt nothwendig die Linie L beide Curven C, c zugleich, in dem Puncte P, so wie die Linie l dieselben zugleich in dem Punkte p berührt, und nothwendiger Weise gehen auch beide Curven C, c durch den Punct q. Da es aber bekanntlich unmöglich ist, dass zwei Curven vom zweiten Grade C, c, einander in zwei Puncten P, p berühren und ausserdem noch in einem Puncte q schneiden, so folgt, dass die beiden vorausgesetzten Curven C, c ein und dieselbe Curve sind, in welcher die beiden Kegelflächen A, a sich scheiden.

Da aber, wie sich aus der Anschauung ergiebt, der Durchschnitt der beiden Kegelflächen aus zwei Theilen besteht, so ist jeder derselben eine ebene Curve, und daher schneiden sich die beiden Kegel A, a unter den vorausgesetzten Bedingungen, in zwei ebenen Curven zweiten Grades.

Aus dem vorliegenden Satze folgt unmittelbar der nachstehende:

II. „Wenn irgend zwei Kegel vom zweiten Grade einander in einer ebenen Curve C schneiden, so schneiden sie einander, im Allgemeinen, noch in einer zweiten ebenen Curve."

Denn wenn zwei Kegel vom zweiten Grade einander in einer ebenen Curve C schneiden, so kann man im Allgemeinen durch die Linie, welche die Scheitel der Kegel verbindet, immer zwei Ebenen legen, von denen jede die genannte ebene Durchschnitts-Curve C, und somit beide Kegel berührt, wodurch also die Wahrheit des gegenwärtigen Satzes unmittelbar aus dem vorigen Satze folgt. Geht aber die Linie, welche die Scheitel der Kegel verbindet, durch den von der genannten Curve C eingeschlossenen Raum, so dass keine Ebene beide Kegel zugleich berühren kann, so kann der vorliegende Satz dennoch auf ebenso einfache Weise, durch Hülfe der harmonischen Proportion, ganz allgemein bewiesen werden, welches wir im Zusammenhange mit andern ähnlichen Betrachtungen, an einem anderen Orte zeigen werden.

Hieraus folgt, dass wenn die in den Sätzen No. 5 vorkommenden drei Kegel vom zweiten Grade sind: so schneiden sie sich, unter den dortigen

Bedingungen, paarweise in sechs ebenen Curven. Um bei den weiteren Folgerungen aus diesen Sätzen der Einbildungskraft zu Hülfe zu kommen, nehme man an: Fig. 3 sei der Schnitt einer Ebene mit drei Kegeln vom zweiten Grade, deren Scheitel in einer geraden Linie liegen, und welche einander in sechs ebenen Curven schneiden: nämlich S, a, A seien die Scheitel, und die drei Winkel BSE, $\beta a\delta$, $\beta A\varepsilon$ seien die Durchschnitte der Ebene mit den drei Kegeln: so gehen die Ebenen der beiden Curven, in welchen die beiden Kegel S und a einander schneiden, durch die beiden Linien bc und de; eben so gehen die Ebenen der beiden Curven, in welchen sich die beiden Kegel S und A schneiden, durch die beiden Linien BC und DE; desgleichen gehen die Ebenen der beiden Curven, in welchen sich die Kegel a und A schneiden, durch die Linien $\beta\gamma$ und $\delta\varepsilon$.

Nun schneiden sich, zufolge des obigen Satzes (No. 5), die drei Ebenen bc, BC und $\beta\gamma$ (d. h. die oben genannten Ebenen, welche respective durch die in der Figur verzeichneten Linien bc, BC und $\beta\gamma$ gehen) in einer Linie L_1 (welche die Ebene der Figur in dem Puncte L_1 schneidet); nach demselben Satze schneiden ferner auch die drei Ebenen bc, DE und $\varepsilon\delta$ einander in einer Linie L_2, desgleichen die drei Ebenen de, BC und $\delta\varepsilon$ in einer geraden Linie L_3, und eben so schneiden die drei Ebenen ed, ED und $\beta\gamma$ einander in einer geraden Linie L_4.

Bemerkt man ferner, dass, wenn z. B. die beiden Linien L_1, L_2, welche in einerlei Ebene bc liegen, sich in einem Puncte P treffen, alsdann nothwendig die fünf Ebenen bc, BC, DE, $\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$ durch diesen nämlichen Punct P gehen, und dass daher nothwendig auch die sechste Ebene de, so wie auch die beiden übrigen Linien L_3, L_4 durch denselben Punct P gehen: so schliesst man daraus, dass die sechs Ebenen bc, de, BC, DE, $\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$, so wie auch die vier Linien L_1, L_2, L_3, L_4 im Allgemeinen immer in einem und demselben Puncte P zusammentreffen, und nur in dem besonderen Falle, wo dieser Punct sich ins Unendliche entfernt, mit einer und derselben geraden Linie parallel sind.

Aus allen diesem zusammengenommen zieht man folgenden Satz*):

III. „Liegen die Scheitel S, a, A dreier gegebenen Kegel BSE, $\beta a\delta$, $\beta A\varepsilon$ vom zweiten Grade, welche einander in ebenen Curven schneiden, in einer geraden Linie SaA: so schneiden sich von den sechs Ebenen (bc, de, BC, DE, $\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$) der sechs Durchschnitts-Curven, vier Mal drei in einer geraden Linie (L_1, L_2, L_3, L_4), und alle sechs Ebenen, so wie

---

*) In Bezug auf die Durchschnittsfigur schliesst man daraus den folgenden Satz:

„Liegen die Scheitel S, a, A dreier geradliniger Winkel BSE, $\beta a\delta$, $\beta A\varepsilon$, welche in einerlei Ebene liegen, in einer geraden Linie SaA: so schneiden sich von den sechs Diagonalen bc, de, BC, DE, $\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$ der drei Vierecke $bdce$, $BDCE$, $\beta\delta\gamma\varepsilon$, welche jene Winkel paarweise mit einander bilden, vier Mal drei in einem Puncte, nämlich in den vier Puncten L_1, L_2, L_3, L_4."

auch diese vier Linien L_1, L_2, L_3, L_4, schneiden einander, zusammen in einem und demselben Puncte P (oder sind zusammen mit einer und derselben geraden Linie parallel)."

8.

Die in dem Vorliegenden (No. 7) enthaltenen Sätze über die Kegel vom zweiten Grade, sind nur spezielle Fälle von folgenden allgemeinern Sätzen über die Flächen vom zweiten Grade überhaupt, welche wir ohne Beweis hinzufügen, und welche an einem anderen Orte, durch eben so einfache geometrische Betrachtungen bewiesen werden sollen.

I. „Wenn zwei beliebige Flächen zweiten Grades einander in einer ebenen Curve schneiden: so schneiden sie sich im Allgemeinen noch in einer zweiten ebenen Curve." (II. Satz No. 7.)

II. „Zieht man aus einem Puncte S alle möglichen geraden Linien, welche eine gegebene Fläche vom zweiten Grade berühren, so liegen alle diese Linien in einer Kegelfläche zweiten Grades, und alle zusammen berühren die gegebene Fläche in einer ebenen Curve vom zweiten Grade."

Oder mit andern Worten:

„Legt man an eine gegebene Fläche zweiten Grades, aus einem ausserhalb derselben beliebig angenommenen Puncte S, einen Berührungskegel an dieselbe, so ist dieser Kegel vom zweiten Grade, und berührt die gegebene Fläche in einer ebenen Curve vom zweiten Grade."

III. „Berühren zwei beliebige Flächen vom zweiten Grade einander in mehr als zwei Puncten: so berühren sie einander in einer ebenen Curve vom zweiten Grade."

IV. „Berühren zwei beliebige Flächen vom zweiten Grade eine dritte solche Fläche in ebenen Curven: so schneiden sie sich in ebenen Curven."

Da zwei Ebenen zusammengenommen als eine Fläche vom zweiten Grade zu betrachten sind, so ist der erste Satz No. 7. ein spezieller Fall des gegenwärtigen. Ein anderer spezieller Fall ist folgender:

„Jede zwei Cylinder vom zweiten Grade, welche zugleich entweder zwischen oder ausserhalb von zwei parallelen Ebenen liegen, (also elliptische oder hyperbolische Cylinder sind) und diese Ebenen berühren, schneiden einander in zwei ebenen Curven vom zweiten Grade."

V. „Zwei beliebige ebene Curven, welche in einer und derselben Fläche zweiten Grades liegen, bestimmen zusammen zwei Kegel vom zweiten Grade, d. h., die beiden Curven liegen zugleich in zwei bestimmten Kegeln zweiten Grades." Oder mit anderen Worten: „Bewegt man eine Ebene, welche zwei ebene Curven berührt, die in einer und derselben Fläche zweiten Grades liegen, so dass sie die beiden Curven immerfort berührt: so geht diese Ebene immer durch einen bestimmten Punct S, und dieser Punct S ist der Scheitel eines Kegels (zweiten Grades), welcher durch die beiden genannten Curven geht, und welcher stets von der Ebene berührt wird." Da aber die

Ebene auf zwei verschiedene Arten an die beiden Curven gelegt werden kann, so liegen die beiden Curven zugleich in zwei bestimmten Kegeln.

Insbesondere folgt hieraus:

„Macht man in irgend einem gegebenen Kegel zweiten Grades zwei beliebige ebene Schnitte: so liegen die beiden Durchschnitts-Curven zugleich in einem anderen Kegel vom zweiten Grade."

Ferner kann aus dem obigen Satze der folgende abgeleitet werden:

„Legt man durch einen willkürlichen Punct P, in einer Fläche vom zweiten Grade eine Berührungsebene (E), und ferner aus demselben Punct P, durch beliebige ebene Curven, welche in der Fläche liegen, Kegel: so schneidet jede Ebene, welche mit der genannten Berührungsebene (E) parallel ist, alle diese Kegel (sammt der gegebenen Fläche) in ähnlichen Curven zweiten Grades." Oder mit andern Worten:

„Projizirt man aus einem willkürlichen Puncte P, der in einer gegebenen Fläche vom zweiten Grade liegt, beliebige ebene Curven, welche in derselben Fläche liegen, auf eine Ebene, welche mit der in dem Punct P an die Fläche gelegten Berührungsebene parallel ist: so sind die Projectionen sämmtlich ähnliche Curven vom zweiten Grade."

VI. „Wenn von drei beliebigen gegebenen Flächen zweiten Grades, je zwei einander in ebenen Curven schneiden: so schneiden sich von den sechs Ebenen dieser sechs Durchschnitts-Curven [je zwei Flächen schneiden einander in zwei ebenen Curven (I.)], vier Mal drei in einer geraden Linie, und alle sechs Ebenen, oder diese vier geraden Linien schneiden sich zusammen in einem und demselben Puncte P."

Der Beweis dieses Satzes folgt aus (V. und No. 7. III.).

Aus dem vorliegenden Satze kann leicht der folgende abgeleitet werden.

VII. „Wenn in einer Ebene irgend zwei beliebige Curven zweiten Grades gegeben sind, und man legt durch jede derselben eine willkürliche Fläche zweiten Grades, jedoch so, dass die beiden Flächen einander in zwei ebenen Curven schneiden: so schneiden die Ebenen dieser beiden Durchschnitts-Curven die gegebene Ebene in zwei constanten Linien L, l."

Diese beiden Linien L, l haben in Bezug auf die beiden gegebenen Curven eine der merkwürdigsten Eigenschaften zweier beliebigen Kegelschnitte in einerlei Ebene. Nimmt man nämlich in einer der beiden Linien L, l (z. B. Fig. 4.) einen willkürlichen Punct P an, legt aus diesem Punct an jede der beiden gegebenen Curven, zwei Tangenten, welche die Curven in den vier Puncten A, B und a, b berühren, verbindet ferner diese vier Puncte A, B, a, b paarweise durch sechs gerade Linien, von denen sich Aa und Bb in einem Puncte S, Ab und Ba in einem Puncte T, und AB und ab in einem Puncte Q schneiden: so bleiben die Puncte S und T constant, wie auch der angenommene Punct P unter der festgesetzten Bedingung seine Lage ändert; dagegen ist der Ort des Puncts Q, dieselbe