

Cambridge University Press

978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6

Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe

Frontmatter

[More information](#)

## CAMBRIDGE LIBRARY COLLECTION

*Books of enduring scholarly value*

### **Mathematics**

From its pre-historic roots in simple counting to the algorithms powering modern desktop computers, from the genius of Archimedes to the genius of Einstein, advances in mathematical understanding and numerical techniques have been directly responsible for creating the modern world as we know it. This series will provide a library of the most influential publications and writers on mathematics in its broadest sense. As such, it will show not only the deep roots from which modern science and technology have grown, but also the astonishing breadth of application of mathematical techniques in the humanities and social sciences, and in everyday life.

### **Mathematische Werke**

The German mathematician Karl Weierstrass (1815–97) is generally considered to be the father of modern analysis. His clear eye for what was important is demonstrated by the publication, late in life, of his polynomial approximation theorem; suitably generalised as the Stone–Weierstrass theorem, it became a central tool for twentieth-century analysis. Furthermore, the Weierstrass nowhere-differentiable function is the seed from which springs the entire modern theory of mathematical finance. The best students in Europe came to Berlin to attend his lectures, and his rigorous style still dominates the first analysis course at any university. His seven-volume collected works in the original German contain not only published treatises but also records of many of his famous lecture courses. Edited by Rudolf Rothe (1873–1942), Volume 6 was published in 1915.

Cambridge University Press

978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6

Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe

Frontmatter

[More information](#)

---

Cambridge University Press has long been a pioneer in the reissuing of out-of-print titles from its own backlist, producing digital reprints of books that are still sought after by scholars and students but could not be reprinted economically using traditional technology. The Cambridge Library Collection extends this activity to a wider range of books which are still of importance to researchers and professionals, either for the source material they contain, or as landmarks in the history of their academic discipline.

Drawing from the world-renowned collections in the Cambridge University Library and other partner libraries, and guided by the advice of experts in each subject area, Cambridge University Press is using state-of-the-art scanning machines in its own Printing House to capture the content of each book selected for inclusion. The files are processed to give a consistently clear, crisp image, and the books finished to the high quality standard for which the Press is recognised around the world. The latest print-on-demand technology ensures that the books will remain available indefinitely, and that orders for single or multiple copies can quickly be supplied.

The Cambridge Library Collection brings back to life books of enduring scholarly value (including out-of-copyright works originally issued by other publishers) across a wide range of disciplines in the humanities and social sciences and in science and technology.

Cambridge University Press

978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich  
Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6

Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe

Frontmatter

[More information](#)

# Mathematische Werke

*Herausgegeben unter Mitwirkung einer  
von der Königlich Preussischen Akademie  
der Wissenschaften eingesetzten Commission*

VOLUME 6

KARL WEIERSTRASS  
EDITED BY RUDOLF ROTHE



CAMBRIDGE  
UNIVERSITY PRESS

Cambridge University Press

978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich  
Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6

Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe

Frontmatter

[More information](#)

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town,  
Singapore, São Paulo, Delhi, Mexico City

Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York

[www.cambridge.org](http://www.cambridge.org)

Information on this title: [www.cambridge.org/9781108059183](http://www.cambridge.org/9781108059183)

© in this compilation Cambridge University Press 2013

This edition first published 1915

This digitally printed version 2013

ISBN 978-1-108-05918-3 Paperback

This book reproduces the text of the original edition. The content and language reflect  
the beliefs, practices and terminology of their time, and have not been updated.

Cambridge University Press wishes to make clear that the book, unless originally published  
by Cambridge, is not being republished by, in association or collaboration with, or  
with the endorsement or approval of, the original publisher or its successors in title.

Cambridge University Press

978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich  
Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6

Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe

Frontmatter

[More information](#)

---

# MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

Cambridge University Press

978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich

Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6

Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe

Frontmatter

[More information](#)

# MATHEMATISCHE WERKE

VON

**KARL WEIERSTRASS.**

---

HERAUSGEBEN

UNTER MITWIRKUNG EINER VON DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE  
DER WISSENSCHAFTEN EINGESETZTEN COMMISSION.

---

SECHSTER BAND.

VORLESUNGEN

ÜBER

ANWENDUNGEN DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

MIT EINEM BILDNISS VON WEIERSTRASS.

---

BERLIN.

MAYER & MÜLLER.

1915.

Cambridge University Press

978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich  
Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6

Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe

Frontmatter

[More information](#)

# VORLESUNGEN

ÜBER

## ANWENDUNGEN DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON

**KARL WEIERSTRASS.**

---

BEARBEITET

VON

**RUDOLF ROTHE.**

---

BERLIN.

MAYER & MÜLLER.

1915.

Cambridge University Press

978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich  
Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6

Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe

Frontmatter

[More information](#)

---

Übersetzungsrecht vorbehalten.



## VORWORT.

Die vorliegende Bearbeitung der Vorlesungen über Anwendungen der elliptischen Functionen ist aus folgenden Quellen entstanden:

für den grössten Theil, nämlich den ersten, zweiten, dritten und sechsten Abschnitt, sowie das vierundzwanzigste bis siebenundzwanzigste Kapitel ist eine von Georg Hettner angefertigte Ausarbeitung der Vorlesung benutzt worden, die Weierstrass im Sommer 1875 unter dem Titel »Ausgewählte, mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen zu lösende Probleme der Geometrie und Mechanik« gehalten hat;

für die drei ersten Abschnitte ferner ein Quartheft mit Aufzeichnungen, die von Weierstrass selbst für Vorlesungszwecke niedergeschrieben worden sind;

für das zehnte Kapitel und den siebenten Abschnitt eine im Besitze des Mathematischen Vereins in Berlin befindliche Ausarbeitung ohne Jahreszahl;

für den fünften Abschnitt eine von Herrn H. A. Schwarz angefertigte Abschrift eines Heftes von Weierstrass aus dem Jahre 1884, sowie eines Manuscriptes von Weierstrass aus dem Jahre 1888, das dieser Sophie v. Kowalevski übergeben hatte;

für das achtundzwanzigste und neunundzwanzigste Kapitel eine von Herrn C. Weltzien verfertigte Nachschrift einer Vorlesung aus dem Sommer 1873;

für den neunten Abschnitt eine Ausarbeitung von Herrn Felix Müller aus dem Sommersemester 1865, zum Theil auch eine Ausarbeitung von Herrn L. Kiepert aus dem Jahre 1869;

Cambridge University Press

978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6

Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe

Frontmatter

[More information](#)

VI

VORWORT.

das elfte bis dreizehnte Kapitel endlich sind, von redactionellen Änderungen abgesehen, aus Schellbachs Lehre von den elliptischen Integralen und Thetafunctionen (Berlin 1864) übernommen worden, wo der Inhalt als von Weierstrass herrührend bezeichnet ist.

Ausser den erwähnten Aufzeichnungen haben sich in Weierstrass' Nachlass keinerlei Schriften gefunden, die hier hätten benutzt werden können.

Johannes Knoblauch hat bis zu seinem Tode mit derselben Hingebung, die er seit langen Jahren bei der Herausgabe dieser Werke bewiesen hat, und mit der ihm eigenen Sorgfalt auch an dem vorliegenden Bande mitgearbeitet: durch mannigfache Rathschläge bei der Auswahl und Anordnung des Stoffes, durch sachliche Prüfung des Textes und durch Correcturenlesen (bis zum neunundzwanzigsten Bogen). Es entsprach seinem Wunsche, dass dieser Band zu Weierstrass' hundertstem Geburtstage fertiggestellt werde.

Berlin, den 31. October 1915.

Rudolf Rothe.

## INHALTS-VERZEICHNISS.

	Seite
Einleitung . . . . .	1—2.
Erster Abschnitt.	
Der Flächeninhalt des Mantels eines schiefen Kegels mit kreisförmiger Grundfläche . . . . .	3—29.
Erstes Kapitel. Darstellung des Mantels eines schiefen Kreiskegels durch ein elliptisches Integral dritter Art . . . . .	3—14.
Zweites Kapitel. Berechnung des elliptischen Integrals $\int_0^{\tilde{\omega}} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} du$ .	15—29.
Zweiter Abschnitt.	
Die Oberfläche eines dreiaxigen Ellipsoids . . . . .	30—77.
Drittes Kapitel. Elliptische Coordinaten . . . . .	30—41.
Viertes Kapitel. Bestimmung der Oberfläche eines aus Krümmungslinien des Ellipsoids gebildeten Dreiecks . . . . .	42—58.
Fünftes Kapitel. Eindeutige Bestimmung der in der Formel für den Flächen- inhalt des Ellipsoids auftretenden Logarithmen . . . . .	59—68.
Sechstes Kapitel. Berechnung der Gesamtoberfläche des Ellipsoids . . .	69—77.
Dritter Abschnitt.	
Das Potential eines homogenen Ellipsoids und einer homogenen Ellipse	78—104.
Siebentes Kapitel. Das Potential eines homogenen von einer ellipsoidischen Oberfläche begrenzten Körpers . . . . .	78—88.
Achstes Kapitel. Bestimmung des Integrals $\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{a \cos^2 \psi + b \sin^2 \psi + c + 2a' \sin \psi + 2b' \cos \psi + 2c' \cos \psi \sin \psi}}$	89—99.

VIII	INHALTS-VERZEICHNISS.	Seite
Neuntes Kapitel. Bestimmung des Potentials der gleichmässig mit Masse belegten Fläche einer Ellipse . . . . .		100—104.
Vierter Abschnitt.		
Bestimmung des Intervalls für den Werth des Integrals $\int_{x_0}^{x_1} dx/\sqrt{R(x)}$ und Transformation des elliptischen Differentials in die Legendre-Jacobische Normalform . . . . .		105—142.
Zehntes Kapitel. Bestimmung des Intervalls, in dem der Werth des Integrals $\int_{x_0}^{x_1} dx/\sqrt{R(x)}$ gelegen ist. . . . .		105—116.
Elftes Kapitel. Lineare Transformation des elliptischen Differentials $dx/\sqrt{R(x)}$ in die Legendre-Jacobische Normalform . . . . .		117—123.
Zwölftes Kapitel. Specielle Fälle der linearen Transformation des elliptischen Differentials in die Legendre-Jacobische Normalform . . . . .		124—135.
Dreizehntes Kapitel. Transformation zweiten Grades des elliptischen Differentials in die Legendresche Normalform . . . . .		136—142.
Fünfter Abschnitt.		
Integration der elliptischen Differentialgleichung . . . . .		143—182
Vierzehntes Kapitel. Allgemeine Integration der elliptischen Differentialgleichung . . . . .		142—151
Fünfzehntes Kapitel. Specielle Integrale der elliptischen Differentialgleichung		152—167
Sechzehntes Kapitel. Integration der elliptischen Differentialgleichung, wenn ihre Coefficienten sämmtlich reell sind . . . . .		168—175.
Siebzehntes Kapitel. Reellwerthige Integrale der elliptischen Differentialgleichung mit reellen Coefficienten . . . . .		176—182.
Sechster Abschnitt.		
Die Theilung der Lemniscate und die complexe Multiplication der elliptischen Functionen . . . . .		183—237.
Achtzehntes Kapitel. Die lemniscatischen Functionen und die Theilungsgleichung der Lemniscate . . . . .		183—202.
Neunzehntes Kapitel. Die Wurzeln der lemniscatischen Theilungsgleichung und die Fünftheilung der Lemniscate . . . . .		203—213.
Zwanzigstes Kapitel. Die Auflösung der lemniscatischen Theilungsgleichung		214—219.
Einundzwanzigstes Kapitel. Über die complexe Multiplication der elliptischen Functionen . . . . .		220—237.

INHALTS-VERZEICHNISS.	IX
	Seite
<b>Siebenter Abschnitt.</b>	
Das sphärische und das ebene Pendel . . . . .	238—251.
Zweiundzwanzigstes Kapitel. Bestimmung der Coordinaten des sphärischen Pendels . . . . .	238—246.
Dreiundzwanzigstes Kapitel. Fortsetzung. — Das ebene Pendel . . . . .	247—251.
<b>Achter Abschnitt.</b>	
Die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt .	252—329.
Vierundzwanzigstes Kapitel. Vorbereitende Untersuchungen und Aufstellung der Eulerschen Differentialgleichungen . . . . .	252—267.
Fünfundzwanzigstes Kapitel. Bestimmung dreier Richtungscosinus mittels Sigmaquotienten . . . . .	268—282.
Sechszwanzigstes Kapitel. Fortsetzung. Bestimmung der übrigen Rich- tungscosinus . . . . .	283—294.
Siebenundzwanzigstes Kapitel. Die Bewegung der augenblicklichen Dre- hungsaxe . . . . .	295—306.
Achtundzwanzigstes Kapitel. Darstellung der neun Richtungscosinus durch vier Parameter . . . . .	307—316.
Neunundzwanzigstes Kapitel. Über die Bewegung eines starren der Schwere unterworfenen Körpers um einen festen Punkt . . . . .	317—329.
<b>Neunter Abschnitt.</b>	
Bestimmung der geodätischen Linien auf einem Rotationsellipsoide	330—354.
Dreissigstes Kapitel. Darstellung der Cartesischen Coordinaten eines Punktes einer geodätischen Linie auf einem Rotationsellipsoide durch ellip- tische Functionen . . . . .	330—344.
Einunddreissigstes Kapitel. Bestimmung der Bogenlänge der geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoide . . . . .	345—354.
<b>Anmerkungen . . . . .</b>	<b>355.</b>
<b>Berichtigung zum fünften Bande . . . . .</b>	<b>355.</b>