CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6
Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe
Excerpt
More information

EINLEITUNG.

In diesen Vorlesungen sollen vorzugsweise Probleme der Geometrie und der analytischen Mechanik behandelt werden, die sich mit Hilfe der elliptischen Transcendenten lösen lassen. Anwendungen auf die Algebra und die Zahlentheorie werden nur soweit zur Sprache kommen, als sie mit den betrachteten geometrischen und mechanischen Aufgaben im Zusammenhange stehen. Schliesslich sollen, meist ebenfalls in Verbindung mit den genannten Aufgaben, einige specielle Fragen aus der Theorie der elliptischen Integrale und Functionen selbst erörtert werden.

Mehrere der hier behandelten Probleme aus der Geometrie und Mechanik kommen in ihren Anfängen schon bei Legendre in seinem classischen Werke Traité des fonctions elliptiques vor. Unter elliptischen Functionen versteht bekanntlich Legendre das, was wir heute als elliptische Integrale bezeichnen, nicht die Umkehrungsfunctionen. Diese sind erst kurz vor dem Erscheinen des Traité von Abel und Jacobi entdeckt worden. Dem Stande der damaligen Kenntnisse entsprechend führt daher Legendre die Aufgaben, um die es sich handelt, in der Regel auf elliptische Integrale zurück. Heute ist es leicht, einzusehen, dass es oft zweckmässiger und in der Natur der Aufgabe besser begründet ist, an Stelle der Integrale die Umkehrungsfunctionen zu benutzen. Wenn man, um ein Beispiel anzuführen, bei dem Problem des gewöhnlichen mathematischen Pendels den Sinus oder Cosinus des Ausschlagswinkels in die Rechnung einführt, so wird die Schwingungszeit durch ein elliptisches Integral erster Art dargestellt. Dadurch beantwortet sich die Frage, zu welcher Zeit sich der bewegliche Punkt an einem gegebenen Orte befindet.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6
Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe
Excerpt
More information

Aber ohne Zweifel entspricht es dem physikalischen Sinne der Aufgabe mehr, nach dem Orte zu fragen, den der bewegliche Punkt einnimmt, wenn die Zeit gegeben ist. Und die Beantwortung dieser Frage geschieht mittels einer einfachen elliptischen Function.

Aber auch da, wo die Zurückführung der Aufgabe auf elliptische Integrale ausreicht, erlaubt uns unsere jetzige genauere Kenntniss der Theorie der elliptischen Integrale, die Lösung vollständiger durchzuführen, als es zu Legendres Zeiten möglich war. Legendre kannte z. B. den Satz noch nicht, dass die Berechnung aller elliptischen Integrale auf die der ersten Art gegründet werden kann, d. h., in der hier benutzten Bezeichnungsweise, auf die Bestimmung von u aus der Gleichung

$$\wp u = s$$

bei gegebenem Werthe von s. Die Einführung des elliptischen Integrals erster Art, u, in die Darstellung der Integrale zweiter und dritter Art rührt ebenfalls von Abel und Jacobi her. In den seltensten Fällen allerdings wird eine Gleichung der vorstehenden Gestalt unmittelbar durch den Ansatz der Aufgabe gegeben sein, vielmehr wird es sich in der Regel zunächst um irgend ein elliptisches Integral der Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

unter $R(x)$ eine ganze rationale Function vierten Grades verstanden, und um dessen Umkehrung handeln. Dann hat der Auflösung jener Gleichung die Transformation des Differentials

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

in die Normalform

$$\frac{-ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

voranzugehen. Dieses Problem ist im ersten Kapitel der Elliptischen Functionen (Band V dieser Ausgabe, im Folgenden mit E. F citirt), die Berechnung der elliptischen Integrale erster Art im neunundzwanzigsten Kapitel behandelt worden, worauf hier besonders verwiesen sei.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6
Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe
Excerpt
More information

Erster Abschnitt.

DER FLÄCHENINHALT DES MANTELS EINES SCHIEFEN KEGELS MIT KREISFÖRMIGER GRUNDFLÄCHE.

Erstes Kapitel.

Darstellung des Mantels eines schiefen Kreiskegels durch ein elliptisches Integral dritter Art.

Es seien f, g, h eindeutige reguläre Functionen zweier reeller und von einander unabhängiger Veränderlicher u, v. Man setze

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v)$$

und ertheile u, v alle Werthepaare eines bestimmten Bereiches. Denkt man sich u, v als cartesische Coordinaten eines Punktes einer Ebene, so entspricht jedem Punkte (u, v) dieser Ebene ein Punkt (x, y, z) einer Fläche und jedem begrenzten Theil (E) der Ebene ein begrenztes Stück der Fläche. Wird nun

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

gesetzt, so ist

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6
Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe
Excerpt
More information

mithin gilt für das Oberflächenelement der Ausdruck

$$\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

und der Inhalt des Theils der Oberfläche, der dem begrenzten Stück (E) der Ebene der Variablen u, v entspricht, wird

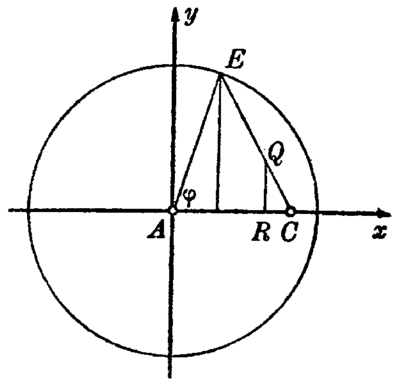
$$J = \iint \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

wobei die Integration über den Bereich (E) zu erstrecken und der positive Wurzelwerth zu benutzen ist.

Dies möge nun auf die Berechnung des Mantels eines schiefen Kegels mit kreisförmiger Basis angewendet werden.

Die Grundfläche des Kegels sei der Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt A. Die Spitze des Kegels heisse B; das Loth von B auf die Ebene der Grundfläche treffe diese in C; ferner sei die Höhe $BC = c$, und $AC = a$.

Das cartesische Coordinatensystem habe den Anfangspunkt A. Die positive Richtung der x-Axe sei AC, die der y-Axe sei in der Ebene des Grundkreises so gelegen, dass sie, von der Spitze des Kegels aus gesehen, gegen die positive Richtung der x-Axe unter einem rechten Winkel im positiven Sinne, wie ihn die Figur angiebt, gedreht erscheint. Endlich sei die positive Richtung der z-Axe parallel zur Geraden CB. Man nehme nun einen Punkt P auf dem Kegelmantel beliebig an. Die durch ihn und die Spitze gehende Gerade treffe den Grundkreis in E. Man zeichne ferner die



Figur 1.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

Cambridge University Press
978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6
Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe
Excerpt
More information

drei Coordinaten von P so, dass $AR = x$, $RQ = y$, $QP = z$ wird. Dann liegt der Punkt Q auf der Verbindungsgeraden von E mit C.

Die Figur soll die Grundebene des Kegels, von der Spitze aus gesehen, darstellen.

Aus dem Dreieck ACE, in dem der Winkel bei A, im positiven Drehungssinn gemessen, mit φ bezeichnet werden möge, ergiebt sich, nachdem noch von E das Loth auf AC gefällt ist,

$$x = AC - RC = a - \frac{y}{r \sin\varphi}(a - r\cos\varphi),$$

$$\frac{y}{r\sin\varphi} = \frac{QC}{EC} = \frac{c-z}{c},$$

oder

$$x = a - \frac{c-z}{c}(a - r\cos\varphi),$$

$$y = r\sin\varphi\,\frac{c-z}{c}.$$

Setzt man also

$$\frac{c-z}{c} = t,$$

so wird

$$x = a - t(a - r\cos\varphi),$$
$$y = rt\sin\varphi,$$
$$z = c - ct.$$

Diese Gleichungen stellen die Coordinaten eines willkürlichen Punktes der Kegelfläche eindeutig als Functionen der beiden unabhängigen Variablen t und φ dar, falls $c > 0$, wie zunächst angenommen werden soll. Aus den Formeln folgt

$$dx = -(a - r\cos\varphi)\,dt - rt\sin\varphi\,d\varphi,$$
$$dy = r\sin\varphi\;dt + rt\cos\varphi\,d\varphi,$$
$$dz = -c\,dt,$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ((a - r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi + c^2)\,dt^2 + 2\,art\sin\varphi\,dt\,d\varphi + r^2t^2\,d\varphi^2,$$

mithin

$$E = a^2 + c^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi,$$
$$F = art\sin\varphi,$$
$$G = r^2t^2,$$
$$EG - F^2 = r^2t^2(c^2 + (a\cos\varphi - r)^2).$$

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6
Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe
Excerpt
More information

Wenn z stetig wachsend alle Werthe von 0 bis c durchläuft, so geht t stetig abnehmend von 1 bis 0. Der Flächeninhalt des Kegelmantels ist demnach

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{c^2+(a\cos\varphi - r)^2}\, r\, t\, dt$$

oder

$$J = \frac{1}{2} r \int_0^{2\pi} \sqrt{c^2+(a\cos\varphi - r)^2}\, d\varphi,$$

worin der Quadratwurzel ihr positiver Werth beizulegen ist. Diesen Ausdruck hätte man auch direct durch Zerlegung des Kegelmantels von der Spitze aus in unendlich schmale Dreiecke mittels einer einfachen geometrischen Überlegung finden können. Wenn man das Integrationsintervall in zwei Theile zerlegt, von 0 bis π und von π bis 2π, und in dem zweiten Integrale statt $2\pi-\varphi$ wieder φ schreibt, so nimmt J die Form

$$(1.)\qquad J = r \int_0^{\pi} \sqrt{c^2+(a\cos\varphi - r)^2}\, d\varphi$$

an.

Um die Berechnung dieses Integrales mit Hilfe der elliptischen Transscendenten wird es sich im Folgenden handeln.

Man setze

$$\cos\varphi = x;$$

da φ stetig von 0 bis π geht, so durchläuft x stetig abnehmend den Bereich $+1$ bis -1, und es ist $\sqrt{1-x^2} = \sin\varphi$ stets positiv. Das Integral (1.) geht dadurch in

$$J = r \int_{-1}^{+1} \sqrt{c^2+(ax-r)^2}\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

oder, für

$$R(x) = (1-x^2)(c^2+(ax-r)^2),$$

in

$$(2.)\qquad J = r \int_{-1}^{+1} \frac{c^2+(ax-r)^2}{\sqrt{R(x)}}\, dx$$

über. Wenn a von Null verschieden vorausgesetzt wird, so ist $R(x)$ wirklich vom vierten Grade, und man erkennt, dass es sich um ein elliptisches Integral handelt, mit der besonderen Eigenthümlichkeit, dass die ganze Function $R(x)$

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6
Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe
Excerpt
More information

an den Integrationsgrenzen -1 und $+1$ verschwindet, während sie dazwischen beständig positiv ist.

Elliptische Integrale dieser Art, deren allgemeinere Form

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{F(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

ist, wo a_1 und a_2 zwei Wurzeln der biquadratischen Gleichung $R(x) = 0$, und $F(x)$ eine ganze rationale Function beliebigen Grades bedeuten, kommen bei vielen Aufgaben vor, z. B. bei der Bestimmung der Oberfläche des Ellipsoids (vgl. das vierte Kapitel), des Potentials des Ellipsoids (siebentes Kapitel), ferner bei der Berechnung des Inhalts eines Flächenstücks auf einer Kugel, das von einem sphärischen Kegelschnitt begrenzt wird, bei der Bestimmung des Umfangs eines sphärischen Kegelschnitts. Integrale der genannten Art sollen daher im Folgenden etwas eingehender untersucht werden, als es für die ursprünglich gestellte Aufgabe erforderlich wäre.

Die Coefficienten der ganzen Function vierten Grades $R(x)$ seien als reelle Grössen vorausgesetzt. In der Lehre von der Transformation der elliptischen Differentiale (E. F. Kap. 1) wird gezeigt, dass derartige Integrale durch eine lineare Substitution auf solche zurückführbar sind, in denen

$$\sqrt{S} = \sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}$$

statt $\sqrt{R(x)}$ auftritt, wobei g_2 und g_3 wieder reelle Werthe haben. Den ursprünglichen Grenzen a_1 und a_2 können in dem transformirten Integral die Grenzen ∞ und e_α entsprechen, wo e_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ eine der drei Wurzeln der Gleichung $S = 0$ bedeutet. Und zwar kann man die Grenze e_α gleich e_1 nehmen, wenn alle drei Grössen e_1, e_2, e_3 reell sind, wobei dann $e_1 > e_2 > e_3$ sein möge, und es ist $e_\alpha = e_2$ zu setzen, wenn nur eine der drei Wurzeln, nämlich e_2, reell, die beiden andern also conjugirt complex sind. Das transformirte Integral ist demnach von der Form

$$\int_{e_1}^{\infty} f(s)\frac{ds}{\sqrt{S}} \quad \text{oder} \quad \int_{e_2}^{\infty} f(s)\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

wobei $f(s)$ eine ganze rationale Function ihres Arguments bedeutet.

Man bezeichne mit a_1, a_2, a_3, a_4 die vier Werthe von x, für die $R(x)$

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

Cambridge University Press
978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6
Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe
Excerpt
More information

verschwindet. In der behandelten speciellen Aufgabe sei

$$(3.)\qquad a_1 = -1,\quad a_2 = +1,\quad a_3 = \frac{r-ic}{a},\quad a_4 = \frac{r+ic}{a}.$$

Man benutze jetzt die Transformationsformeln (E. F. S. 15 (VI.))

$$(4.)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{1}{4}\dfrac{R'(a_1)}{x-a_1} + \dfrac{1}{24}R''(a_1) \\ \sqrt{S} = \dfrac{1}{4}\dfrac{R'(a_1)}{(x-a_1)^2}\sqrt{R(x)}, \end{cases}$$

so ergiebt sich

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Für $x = a_1$ wird $s = \infty$. Ferner bezeichne man die zu x gleich

$$a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad \infty$$

gehörenden Werthe von s mit

$$e_2,\quad e_1,\quad e_3,\quad s_0.$$

Wenn x stetig von a_1 bis a_2 geht, so durchläuft s stetig abnehmend alle Werthe von ∞ bis e_2. Es wird daher

$$\int_{a_1}^{a_2} F(x)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{\infty}^{e_2} f(s)\frac{-ds}{\sqrt{S}} = \int_{e_2}^{\infty} f(s)\frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Führt man in der ersten Formel (4.) für x der Reihe nach a_2, a_3, a_4 ein und subtrahirt, so folgt

$$e_2 - e_1 = \frac{1}{4}R'(a_1)\left(\frac{1}{a_2-a_1} - \frac{1}{a_3-a_1}\right),$$

$$e_2 - e_3 = \frac{1}{4}R'(a_1)\left(\frac{1}{a_2-a_1} - \frac{1}{a_4-a_1}\right),$$

$$e_1 - e_3 = \frac{1}{4}R'(a_1)\left(\frac{1}{a_3-a_1} - \frac{1}{a_4-a_1}\right),$$

oder wenn man

$$R(x) = A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4),$$

also

$$R'(a_1) = A(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)$$

setzt,

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6
Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe
Excerpt
More information

$$
(5.)\quad \begin{cases} e_2 - e_1 = -\frac{1}{4} A(a_1 - a_4)(a_2 - a_3) \\ e_2 - e_3 = -\frac{1}{4} A(a_1 - a_3)(a_2 - a_4) \\ e_1 - e_3 = -\frac{1}{4} A(a_2 - a_1)(a_4 - a_3). \end{cases}
$$

Ferner ist

$$
s_0 = \frac{1}{24} R''(a_1),
$$

$$
e_2 - s_0 = \frac{1}{4} \frac{R'(a_1)}{a_2 - a_1},
$$

d. h.

$$
e_2 - s_0 = -\frac{1}{4} A(a_1 - a_3)(a_1 - a_4).
$$

Diese Formeln gelten sämmtlich ganz allgemein unter den angegebenen Voraussetzungen. Man zieht aus ihnen unmittelbar die nachstehenden Folgerungen. Sind alle vier Wurzeln a_1, a_2, a_3, a_4 reell, so sind auch die drei Grössen e_1, e_2, e_3 reell. Sind a_1 und a_2 reell, dagegen a_3 und a_4 conjugirt complex, wie das z. B. bei der hier behandelten Aufgabe der Fall ist, dann ist $e_1 - e_3$ rein imaginär, $e_2 - e_1$ und $e_2 - e_3$ aber sind conjugirt complex, demnach e_2 reell und e_1 und e_3 conjugirt complex. Ist keine der vier Wurzeln a_1, a_2, a_3, a_4 reell, und sind a_1, a_2 und ebenso a_3, a_4 paarweise conjugirt, so werden $a_1 - a_4$, $a_2 - a_3$ und $a_2 - a_4$, $a_1 - a_3$ paarweise conjugirt complex, demnach ihre Producte und also auch $e_2 - e_1$ und $e_2 - e_3$ reell, weiter werden in diesem Falle $a_2 - a_1$ und $a_4 - a_3$ rein imaginär, demnach ihr Product und $e_1 - e_3$ reell. Dann sind also alle drei Differenzen $e_2 - e_1$, $e_2 - e_3$, $e_1 - e_3$ reell, und wegen der Relation

$$
e_1 + e_2 + e_3 = 0
$$

müssen auch e_1, e_2, e_3 selbst reell sein.

Das Ergebniss ist also: Unter der Voraussetzung reeller Coefficienten der ganzen Function vierten Grades $R(x)$ werden bei der Substitution (4.) die drei Grössen e_α sämmtlich reell, wenn die Gleichung $R(x) = 0$ entweder nur reelle oder nur complexe Wurzeln hat; dagegen wird eine der Grössen e_α reell und die beiden anderen conjugirt complex, wenn $R(x) = 0$ zwei reelle und zwei complexe Wurzeln hat. Dieses Ergebniss bleibt bestehen, wenn in der Substitution (4.) an Stelle von a_1 irgend eine der vier Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ gesetzt wird.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

Cambridge University Press
978-1-108-05918-3 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 6
Karl Weierstrass Edited by Rudolf Rothe
Excerpt
More information

Aus den Transformationsformeln (4.) ergiebt sich weiter

$$s - e_1 = \frac{1}{4} R'(a_1)\left(\frac{1}{x-a_1} - \frac{1}{a_3 - a_1}\right)$$

oder

$$s - e_1 = \frac{1}{4} A(a_1 - a_2)(a_1 - a_4)\frac{x - a_3}{x - a_1},$$

und ebenso

$$s - e_2 = \frac{1}{4} A(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)\frac{x - a_2}{x - a_1},$$

$$s - e_3 = \frac{1}{4} A(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\frac{x - a_4}{x - a_1},$$

endlich

$$(6.)\qquad s - s_0 = \frac{1}{4} A \frac{R'(a_1)}{x - a_1} = \frac{1}{4} A \frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)}{x - a_1}.$$

Daraus folgt

$$(7.)\qquad \frac{(s-e_1)(s-e_3)}{(s-s_0)^2} = \frac{(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_3)(a_1-a_4)}.$$

Von diesen Formeln werde jetzt für die hier vorliegende Aufgabe Gebrauch gemacht. Es ist

$$c^2 + (ax - r)^2 = a^2\left(\left(x - \frac{r}{a}\right)^2 + \frac{c^2}{a^2}\right) = a^2(x - a_3)(x - a_4).$$

Mit Benutzung der Formel (7.) führt daher die Transformation (4.) das Integral (2.) in die Gestalt

$$(8.)\qquad J = r a^2 (a_1 - a_3)(a_1 - a_4)\int_{e_2}^{\infty} \frac{(s-e_1)(s-e_3)}{(s-s_0)^2}\frac{ds}{\sqrt{S}}$$

über. Man könnte nun nach dem in der Theorie der elliptischen Functionen (E. F. S. 228—229) auseinandergesetzten Verfahren, indem man

$$s = \wp u, \quad \sqrt{S} = -\wp' u$$

setzt, die Function unter dem Integralzeichen in eine elliptische Function überführen, und deren Integral mit Hilfe von Sigmafunctionen berechnen. Das Ergebniss würde von der Form

$$J = c_0 u + c' \frac{\sigma'}{\sigma} u + \sum_{\lambda=1}^{m} c_\lambda \log \sigma(u - v_\lambda) + f(\wp u, \wp' u)$$

sein, wo $c_0, c', c_1, \ldots c_m$ gegebene Constanten bedeuten, während $v_1, \ldots v_m$ die

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org