

Cambridge University Press

978-1-108-05917-6 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich

Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 5

Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch

Frontmatter

[More information](#)

## CAMBRIDGE LIBRARY COLLECTION

*Books of enduring scholarly value*

### **Mathematics**

From its pre-historic roots in simple counting to the algorithms powering modern desktop computers, from the genius of Archimedes to the genius of Einstein, advances in mathematical understanding and numerical techniques have been directly responsible for creating the modern world as we know it. This series will provide a library of the most influential publications and writers on mathematics in its broadest sense. As such, it will show not only the deep roots from which modern science and technology have grown, but also the astonishing breadth of application of mathematical techniques in the humanities and social sciences, and in everyday life.

### **Mathematische Werke**

The German mathematician Karl Weierstrass (1815–97) is generally considered to be the father of modern analysis. His clear eye for what was important is demonstrated by the publication, late in life, of his polynomial approximation theorem; suitably generalised as the Stone–Weierstrass theorem, it became a central tool for twentieth-century analysis. Furthermore, the Weierstrass nowhere-differentiable function is the seed from which springs the entire modern theory of mathematical finance. The best students in Europe came to Berlin to attend his lectures, and his rigorous style still dominates the first analysis course at any university. His seven-volume collected works in the original German contain not only published treatises but also records of many of his famous lecture courses. Edited by Johannes Knoblauch (1855–1915), Volume 5 was published in 1915.

Cambridge University Press

978-1-108-05917-6 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich

Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 5

Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch

Frontmatter

[More information](#)

---

Cambridge University Press has long been a pioneer in the reissuing of out-of-print titles from its own backlist, producing digital reprints of books that are still sought after by scholars and students but could not be reprinted economically using traditional technology. The Cambridge Library Collection extends this activity to a wider range of books which are still of importance to researchers and professionals, either for the source material they contain, or as landmarks in the history of their academic discipline.

Drawing from the world-renowned collections in the Cambridge University Library and other partner libraries, and guided by the advice of experts in each subject area, Cambridge University Press is using state-of-the-art scanning machines in its own Printing House to capture the content of each book selected for inclusion. The files are processed to give a consistently clear, crisp image, and the books finished to the high quality standard for which the Press is recognised around the world. The latest print-on-demand technology ensures that the books will remain available indefinitely, and that orders for single or multiple copies can quickly be supplied.

The Cambridge Library Collection brings back to life books of enduring scholarly value (including out-of-copyright works originally issued by other publishers) across a wide range of disciplines in the humanities and social sciences and in science and technology.

Cambridge University Press

978-1-108-05917-6 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich

Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 5

Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch

Frontmatter

[More information](#)

# Mathematische Werke

*Herausgegeben unter Mitwirkung einer  
von der Königlich Preussischen Akademie  
der Wissenschaften eingesetzten Commission*

VOLUME 5

KARL WEIERSTRASS  
EDITED BY JOHANNES KNOBLAUCH



Cambridge University Press

978-1-108-05917-6 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich

Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 5

Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch

Frontmatter

[More information](#)

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town,  
Singapore, São Paulo, Delhi, Mexico City

Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York

[www.cambridge.org](http://www.cambridge.org)

Information on this title: [www.cambridge.org/9781108059176](http://www.cambridge.org/9781108059176)

© in this compilation Cambridge University Press 2013

This edition first published 1915  
This digitally printed version 2013

ISBN 978-1-108-05917-6 Paperback

This book reproduces the text of the original edition. The content and language reflect the beliefs, practices and terminology of their time, and have not been updated.

Cambridge University Press wishes to make clear that the book, unless originally published by Cambridge, is not being republished by, in association or collaboration with, or with the endorsement or approval of, the original publisher or its successors in title.

Cambridge University Press

978-1-108-05917-6 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich  
Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 5

Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch

Frontmatter

[More information](#)

---

# MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

Cambridge University Press

978-1-108-05917-6 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich  
Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 5

Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch

Frontmatter

[More information](#)

---

Cambridge University Press

978-1-108-05917-6 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich

Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 5

Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch

Frontmatter

[More information](#)

# MATHEMATISCHE WERKE

VON

**KARL WEIERSTRASS.**

---

HERAUSGEBEN

UNTER MITWIRKUNG EINER VON DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE  
DER WISSENSCHAFTEN EINGESETZTEN COMMISSION.

---

FÜNFTER BAND.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

---

BERLIN.

MAYER & MÜLLER.

1915.

Cambridge University Press

978-1-108-05917-6 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich

Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 5

Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch

Frontmatter

[More information](#)

---

Übersetzungsrecht vorbehalten.

---



Cambridge University Press

978-1-108-05917-6 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich

Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 5

Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch

Frontmatter

[More information](#)

VORLESUNGEN  
ÜBER DIE  
THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON  
KARL WEIERSTRASS.

---

BEARBEITET  
VON  
J. KNOBLAUCH.

---

BERLIN.  
MAYER & MULLER.  
1915.

Cambridge University Press

978-1-108-05917-6 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich

Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 5

Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch

Frontmatter

[More information](#)

## VORWORT.

---

Der folgenden Darstellung der Theorie der elliptischen Functionen liegt für die Kapitel 1 bis 9, 12 und 13 ein Manuscript zu Grunde, das Weierstrass im Jahre 1863 Herrn F. Mertens dictirt hat. Für einige specielle Abschnitte der Anfangskapitel ist eine Ausarbeitung von Herrn Felix Müller aus dem Winter-Semester 1864—65 zu Rathe gezogen worden.

Die Grundlage des 31. Kapitels bildet ein Weierstrasssches Manuscript, dessen Entstehungszeit nicht bekannt ist.

Das Übrige ist nach meiner Nachschrift einer von Weierstrass im Winter-Semester 1874—75 gehaltenen Vorlesung ausgearbeitet worden, in wenigen Einzelheiten unter Heranziehung einer Ausarbeitung von Georg Hettner. Nach dem Gesamtplan von Weierstrass' Mathematischen Werken giebt die vorliegende Darstellung nicht Alles wieder, was in dieser Vorlesung und in dem erstgenannten Manuscript enthalten war. Dagegen kommt der Beweis für die Nichtexistenz von mehr als zwei Perioden in der Weierstrassschen Vorlesung über elliptische Functionen nicht vor.

Herr Rudolf Rothe hat sich der dankenswerthen Mühe unterzogen, die meisten Formeln zu controliren und von sämtlichen Bogen mehrere Correcturen zu lesen.

Berlin, den 7. Februar 1915.

Johannes Knoblauch.

## INHALTS-VERZEICHNISS.

	Seite
Einleitung . . . . .	1—3.
Erstes Kapitel. Transformation des Differential $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ . . . . .	4—16.
Zweites Kapitel. Integration der Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ durch Reihenentwicklung . . . . .	17—22.
Drittes Kapitel. Die Function $\wp u$ . . . . .	23—31.
Viertes Kapitel. Die Function $\zeta u$ . . . . .	32—38.
Fünftes Kapitel. Die partielle Differentialgleichung der $\zeta$ -Function . . . . .	39—50.
Sechstes Kapitel. Lösung der Gleichung $\wp u = s$ durch Reihenentwicklung . . . . .	51—56.
Siebentes Kapitel. Bestimmung aller Lösungen der Gleichung $\wp u = s$ . . . . .	57—66.
Achtes Kapitel. Grundformeln der Theorie der $\zeta$ -Function . . . . .	67—73.
Neuntes Kapitel. Die Perioden der $\wp$ -Function für reelle Invarianten . . . . .	74—85.
Zehntes Kapitel. Die Functionen $\zeta_a u$ und die $\zeta$ -Quotienten . . . . .	86—95.
Elftes Kapitel. Die Differentialgleichungen der $\zeta$ -Quotienten . . . . .	96—102.
Zwölftes Kapitel. Darstellung der $\zeta$ -Function durch ein unendliches Product . . . . .	103—121.
Dreizehntes Kapitel. Umwandlung des unendlichen Productes für die $\zeta$ -Function . . . . .	122—131.
Vierzehntes Kapitel. Darstellung elliptischer Functionen mittels der $\zeta$ -Function . . . . .	132—140.
Fünfzehntes Kapitel. Darstellung elliptischer Functionen durch die $\wp$ -Function . . . . .	141—152.
Sechzehntes Kapitel. Darstellung der Functionen $\zeta_a u$ durch unendliche Producte . . . . .	153—160.
Siebzehntes Kapitel. Weitere Umwandlung der Productausdrücke für die $\zeta$ -Functionen . . . . .	161—164.

VIII	INHALTS-VERZEICHNISS.	Seite
Achtzehntes Kapitel.	Die vier Theta-Functionen . . . . .	165—175.
Neunzehntes Kapitel.	Die allgemeine Theta-Function . . . . .	176—183.
Zwanzigstes Kapitel.	Die Theta-Function mit zwei Parametern. Ver- wandlungsformeln für die $\theta$ - und $\sigma$ -Functionen . . . . .	184—195.
Einundzwanzigstes Kapitel.	Beziehungen zwischen $\sigma$ -Functionen von mehr- gliedrigen Argumenten . . . . .	196—205.
Zweiundzwanzigstes Kapitel.	Die Additionstheoreme der $\sigma$ -Quotienten. Re- lationen zwischen Theta-Functionen von mehrgliedrigen Argumenten	206—210.
Dreiundzwanzigstes Kapitel.	Das Multiplicationstheorem der $\wp$ -Function .	211—221.
Vierundzwanzigstes Kapitel.	Die Multiplicationstheoreme der $\sigma$ -Quotienten	222—227.
Fünfundzwanzigstes Kapitel.	Die elliptischen Integrale . . . . .	228—234.
Sechszwanzigstes Kapitel.	Die Additionstheoreme der Integrale erster, zweiter und dritter Art . . . . .	235—239.
Siebenundzwanzigstes Kapitel.	Formeln zur Berechnung der Perioden . .	240—247.
Achtundzwanzigstes Kapitel.	Bestimmung eines primitiven Periodenpaares der $\wp$ -Function für beliebige Grössen $e_a$ . . . . .	248—254.
Neunundzwanzigstes Kapitel.	Bestimmung von $u$ aus der Gleichung $\wp u = s$	255—263.
Dreissigstes Kapitel.	Anwendung der Formeln des achtzehnten und neun- undzwanzigsten Kapitels auf den Fall reeller Invarianten . . . .	264—275.
Einunddreissigstes Kapitel.	Transformation der elliptischen Functionen .	276—287.
Zweiunddreissigstes Kapitel.	Transformation specieller Functionen . . .	288—301.
Dreiunddreissigstes Kapitel.	Zur Transformation der $\wp$ -Function . . . .	302—313.
Vierunddreissigstes Kapitel.	Die Transformation zweiter Ordnung . . .	314—322.
—————		
Alphabetisches Inhalts-Verzeichniss . . . . .		323—327.