EINLEITUNG.

Die für reelle und complexe Werthe des Argumentes u eindeutig erklärte Exponentialfunction $E(u) = e^u$ hat folgende Haupteigenschaften:

1) Sind die Argumente u, v und w durch die Gleichung

$$w = u + v$$

verbunden, so besteht zwischen den zugehörigen Functionswerthen

$$E(u) = x, \quad E(v) = y, \quad E(w) = z$$

die algebraische Gleichung

$$z = xy.$$

2) Die Function $E(u)$ genügt der algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dE(u)}{du} = E(u).$$

3) Zu einem gegebenen Werthe der Function gehören unendlich viele Werthe des Argumentes. Ist einer von ihnen bekannt, so erhält man jeden anderen durch Addition oder Subtraction eines Vielfachen von $2\pi i$; die Function ist periodisch mit der primitiven Periode $2\pi i$.

Diese Eigenschaften lassen sich, sinngemäss verallgemeinert, auf rationale, und weiter auf beliebige algebraische Functionen von $E(u)$ übertragen. Man kann von einer solchen Function z. B. ohne Schwierigkeit beweisen, dass ihre Werthe für die Argumente u, v und $u+v$ durch eine algebraische Gleichung verbunden sind, dass also, wie man sagt, die Function ein algebraisches Additionstheorem hat. Betrachtet man aber umgekehrt die Existenz eines solchen Additionstheorems als Fundamentaleigenschaft einer noch zu bestimmenden Function, so findet man, dass die algebraisch von $E(u)$ abhängigen Ausdrücke in einer Classe allgemeinerer Functionen enthalten sind, denen diese Eigenschaft zukommt, und die man als elliptische Functionen bezeichnet. Man könnte zu ihnen auch durch Verallgemeinerung einer der beiden anderen Grundeigenschaften von $E(u)$ gelangen. Denn jede elliptische Function genügt einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung, in der u nicht explicite vorkommt, und ferner sind diese Functionen periodisch, und zwar in allgemeinerem Sinne als die Function $E(u)$. Es existiren nämlich für jede solche Function $\varphi(u)$ zwei constante Grössen 2ω und $2\omega'$ von der Art, dass für beliebige ganze Zahlen m und n die Gleichung

$$\varphi(u+2m\omega+2n\omega') = \varphi(u)$$

stattfindet, während die beiden Grössen 2ω und $2\omega'$ sich nicht, wie bei der Exponentialfunction, auf eine zurückführen lassen; ihr Verhältniss ist nicht rational und nicht reell. Man bezeichnet deshalb die elliptischen Functionen als doppelt periodisch.

Wollte man nun von der ersten Haupteigenschaft, also von der Forderung eines algebraischen Additionstheorems ausgehend in die Theorie der elliptischen Functionen einzudringen versuchen, so würde man, wie sich schon nach den ersten Schritten zeigt, eine grössere Anzahl von Sätzen der allgemeinen Functionenlehre kennen oder im voraus beweisen müssen. Es soll deshalb hier der historische Weg eingeschlagen werden, der von der Umkehrung eines sogenannten elliptischen Integrals erster Art

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

ausgeht. Ein Integral heisst dann ein elliptisches, wenn es die Form

$$\int F(x, \sqrt{R(x)})\, dx$$

hat, worin $R(x)$ eine ganze Function dritten oder vierten Grades ohne quadratischen Theiler, F eine rationale Function der beiden Argumente x und $\sqrt{R(x)}$ bedeutet. Diese Integrale führen ihren Namen nach dem für die Theorie völlig gleichgiltigen Umstande, dass eines von ihnen geeignet ist, den Bogen einer Ellipse darzustellen. Es war natürlich, dass man anfing sich mit solchen Integralen zu beschäftigen, nachdem man sich davon überzeugt hatte, dass Integrale derselben Form, in denen der Grad von $R(x)$ gleich 1 oder 2 ist, durch Kreisfunctionen und Logarithmen ausdrückbar sind. Der von Abel herrührende Gedanke, ein specielles elliptisches Integral umzukehren, nämlich in der Gleichung

$$\int^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u$$

die obere Grenze x als Function des Integralwerthes u zu betrachten, hat sich für die gesammte Analysis als besonders fruchtbar erwiesen.

Eine solche Umkehrung ist gleichbedeutend mit der Integration der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x).$$

Dass das Integral dieser Gleichung ein algebraisches Additionstheorem hat, lässt sich leicht mit Hilfe des von Euler gefundenen Resultates zeigen, wonach die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}$$

algebraisch integrirbar ist. Es ist zweckmässig, sich des von Euler in seinen Untersuchungen über das Differential $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ angewendeten Verfahrens zu einem anderen Zweck zu bedienen, nämlich zur formalen Vereinfachung dieses Differentials, d. h. zur Herstellung einer Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}},$$

in der R_1 eine von R verschiedene Function bedeutet. Durch Umkehrung des aus dem transformirten Differential $\frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}$ entspringenden Integrals ergiebt sich, wenn $R_1(x_1)$ passenden Bedingungen unterworfen wird, eine Function von besonders einfachen Eigenschaften, die den weiteren Untersuchungen zu Grunde gelegt werden soll.

Erstes Kapitel.

Transformation des Differentials $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$.

Das elliptische Differential $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, in dem $R(x)$ eine allgemeine ganze Function vierten Grades bedeuten soll, ändert seine Form nicht, wenn an Stelle von x eine ganze oder gebrochene lineare Function von x eingeführt wird:

$$(1.)\qquad x_1 = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}.$$

Hierin bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reelle oder complexe Constanten, deren Determinante $\alpha\delta-\beta\gamma$ nicht verschwinden soll.

Um diese wichtige Eigenschaft des elliptischen Differentials zu beweisen, setze man den aus (1.) folgenden Werth

$$(2.)\qquad x = \frac{\delta x_1-\beta}{\alpha-\gamma x_1}$$

zunächst in $R(x)$ ein, so geht diese Function in einen Quotienten über, dessen Nenner $(\alpha-\gamma x_1)^4$ und dessen Zähler wieder eine ganze Function vierten Grades ist. Es werde dann

$$R(x) = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}{(\alpha-\gamma x_1)^4}R_1(x_1)$$

oder, hiermit gleichbedeutend,

$$R_1(x_1) = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}{(\gamma x+\delta)^4}R(x)$$

gesetzt. Ist $\sqrt{R(x)}$ ein beliebiger der beiden Werthe, die die Quadratwurzel aus $R(x)$ haben kann, so soll $\sqrt{R_1(x_1)}$ durch die Gleichung

$$(3.)\qquad \sqrt{R_1(x_1)} = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma x+\delta)^2}\sqrt{R(x)}$$

oder

$$\sqrt{R(x)} = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\alpha-\gamma x_1)^2}\sqrt{R_1(x_1)} \tag{4.}$$

definirt werden. Aus dieser Formel in Verbindung mit

$$dx = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\alpha-\gamma x_1)^2}dx_1$$

folgt dann in der That

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}.$$

Die Gleichungen (1.) und (3.) lehren, dass nicht nur x_1 eine rationale Function von x ist, sondern auch $\sqrt{R_1(x_1)}$ eine rationale Function von x und $\sqrt{R(x)}$. Setzt man $\sqrt{R(x)} = y$, $\sqrt{R_1(x_1)} = y_1$, so erhalten die beiden Gleichungen (3.) und (4.) die Form

$$y_1 = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)y}{(\gamma x+\delta)^2}, \tag{5.}$$

$$y = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)y_1}{(\alpha-\gamma x_1)^2}. \tag{6.}$$

Es werde nun umgekehrt zu der Gleichung (1.) von vornherein eine Gleichung (5.) hinzugenommen, durch die y_1 als rationale Function von x und y erklärt wird, und zwischen x und y die Beziehung $y^2 = R(x)$ festgesetzt. Aus (1.) und (5.) folgen durch Auflösung die beiden Gleichungen (2.) und (6.), die x und y rational durch x_1 und y_1 ausdrücken, und ferner sieht man, dass x_1 und y_1 durch eine Gleichung $y_1^2 = R_1(x_1)$ verbunden sind, wo $R_1(x_1)$ eine Function derselben Art wie $R(x)$ bedeutet.

Dieses Ergebniss legt es nahe, sich folgende Aufgabe zu stellen:

Sind zwei Veränderliche x und y durch eine Gleichung

$$y^2 = R(x) \tag{7.}$$

verbunden, wo $R(x)$ eine ganze Function ohne quadratischen Theiler bedeutet, über deren Grad keine besondere Annahme gemacht wird, so sollen zwei rationale Functionen dieser Veränderlichen, $F(x,y)$ und $G(x,y)$, derart bestimmt werden, dass wenn man

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x,y), \\ y_1 &= G(x,y) \end{aligned} \tag{8.}$$

setzt, zwischen x_1 und y_1 eine Gleichung derselben Form

$$y_1^2 = R_1(x_1) \tag{9.}$$

besteht, während zugleich x und y rational durch x_1 und y_1 ausgedrückt werden können:

$$\begin{aligned} x &= F_1(x_1, y_1), \\ y &= G_1(x_1, y_1). \end{aligned} \tag{10.}$$

Vermöge (7.) lässt sich die erste Gleichung (8.) auf die Form

$$x_1 = P + Qy$$

bringen, wo P und Q rationale Functionen von x sind. Die Elimination von y ergiebt dann zwischen x und x_1 eine Gleichung der Form

$$Lx_1^2 + Mx_1 + N = 0, \tag{11.}$$

in der L, M, N ganze Functionen von x ohne gemeinsamen Theiler bezeichnen. Unter der Voraussetzung, dass x_1 die irrationale Function $\sqrt{R(x)}$ wirklich enthalte, d. h. dass Q nicht Null sei, ist der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung nicht als Product zweier ganzen Functionen von x und x_1 darstellbar. Denn wäre dies der Fall, so müsste jede der Functionen in Bezug auf x_1 vom ersten Grade sein, sodass x_1 rational durch x allein darstellbar sein würde.

Wendet man dieselben Schlüsse auf die Gleichungen (9.) und (10.) an, die der Annahme nach geeignet sein sollen, (7.) und (8.) zu ersetzen, so sieht man, dass die Beziehung (11.) zwischen x und x_1 auch in der Form

$$L_1x^2 + M_1x + N_1 = 0 \tag{12.}$$

geschrieben werden kann, wo L_1, M_1, N_1 ganze Functionen von x_1 sind. Die Functionen L, M, N können also nicht von höherem als dem zweiten Grade sein. Die Vergleichung von

$$x_1 = P + Q\sqrt{R(x)}$$

mit dem aus (11.) folgenden Ausdruck

$$x_1 = \frac{-M + \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L}$$

ergiebt dann weiter, dass $R(x)$ höchstens vom vierten Grade sein kann.

Nimmt man nun die ganze Function $R(x)$ als gegeben an, so hat man zur Lösung der gestellten Aufgabe L, M, N so zu bestimmen, dass

$$M^2-4LN = k^2R(x) \tag{13.}$$

wird, unter k eine Constante verstanden. Setzt man dann, nach Fixirung eines Werthes von $\sqrt{k^2R(x)}$, der mit ky bezeichnet werden soll,

$$x_1 = \frac{-M+ky}{2L}, \tag{14.}$$

so ergiebt sich zwischen x und x_1 eine Gleichung der Form (11.) oder (12.), wo L_1, M_1, N_1 ganze Functionen zweiten Grades sind, oder auch

$$(2L_1x+M_1)^2 = M_1^2-4L_1N_1.$$

Wird nunmehr eine ganze Function $R_1(x_1)$ durch die Gleichung

$$M_1^2-4L_1N_1 = k^2R_1(x_1)$$

erklärt und ein Werth von $\sqrt{k^2R_1(x_1)}$, der ky_1 heissen möge, mittels der Formel

$$y_1 = \frac{2L_1x+M_1}{k} \tag{15.}$$

fixirt, in der L_1 und M_1 durch Einsetzen des Werthes (14.) für x_1 rational durch x und y dargestellt zu denken sind, so sind x_1 und y_1 rationale Functionen von x und y und mit einander durch die Gleichung

$$y_1^2 = R_1(x_1)$$

verbunden. Umgekehrt folgt

$$x = \frac{-M_1+ky_1}{2L_1}, \tag{16.}$$

$$y = \frac{2Lx_1+M}{k}, \tag{17.}$$

sodass, wenn noch der Ausdruck von x in die letzte Gleichung eingesetzt wird, x und y als rationale Functionen von x_1 und y_1 erscheinen.

Endlich ergiebt sich aus der Gleichung zwischen x und x_1,

$$f(x, x_1) = 0,$$

die Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 = 0,$$

die, wenn man $f(x, x_1)$ einmal gleich $L_1 x^2 + M_1 x + N_1$, dann gleich $L x_1^2 + M x_1 + N$ setzt, die Form annimmt:

$$(2L_1 x + M_1)\,dx + (2L x_1 + M)\,dx_1 = 0$$

oder

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dx_1}{y_1},$$

d. h.

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}. \tag{18.}$$

Man kann also noch hinzufügen, dass die Lösung der gestellten Aufgabe die Transformation des Differentials $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ in eines von derselben Form, $\frac{-dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}$, nach sich zieht. Der Werth der Quadratwurzel aus $R(x)$ kann dabei beliebig fixirt werden, dagegen ist der Grösse $\sqrt{R_1(x_1)}$ der Werth beizulegen, der durch die Gleichungen (14., 15.) bestimmt wird. Diese Überführung des Differentials $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ in ein anderes von derselben Gestalt ist zugleich die einzig mögliche, wenn, wie es hier der Fall ist, auch x und $\sqrt{R(x)}$ durch x_1 und $\sqrt{R_1(x_1)}$ rational ausdrückbar sein sollen.

Wir gehen nun auf die Bestimmung von L, M und N näher ein. Wird

$$L = \lambda x^2 + \mu x + \nu,$$
$$M = \lambda' x^2 + \mu' x + \nu',$$
$$N = \lambda'' x^2 + \mu'' x + \nu''$$

gesetzt, so erfordert das Bestehen der Gleichung (13.), in der

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

sein möge, fünf Bedingungsgleichungen, die in Bezug auf die zehn Constanten $\lambda, \mu, \ldots \nu''$ und k homogen und von der zweiten Dimension sind. Der Homogeneität wegen kann man, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, zunächst eine dieser Grössen gleich 1 setzen. Durch drei weitere Relationen kann bewirkt werden, dass $R_1(x_1)$ nur zwei, anstatt, wie $R(x)$, fünf Coefficienten enthält. Endlich lässt sich dadurch, dass eine der Constanten unbestimmt bleibt, erreichen, dass zu einem willkürlichen Werthe von x und einem der zugehörigen Werthe von $\sqrt{R(x)}$ ein ein für alle Mal bestimmter Werth von x_1 gehört, der auch unendlich gross sein kann.

Die drei an zweiter Stelle genannten Bedingungen sollen so beschaffen sein, dass $R_1(x_1)$ nur vom dritten Grade wird und ausserdem das Glied mit

x_1^2 nicht enthält, der Coefficient von x_1^3 aber einen festen Zahlenwerth hat. Die Bestimmung des Systems der Constanten wird sehr erleichtert, wenn man eine dieser Bedingungen vorwegnimmt.

Ordnet man $Lx_1^2+Mx_1+N$ nach Potenzen von x, so findet man

$$L_1 = \lambda x_1^2+\lambda' x_1+\lambda'',$$
$$M_1 = \mu x_1^2+\mu' x_1+\mu'',$$
$$N_1 = \nu x_1^2+\nu' x_1+\nu''.$$

Die Bedingung dafür, dass in

$$M_1^2-4L_1N_1 = k^2 R_1(x_1)$$

das Glied mit x_1^4 fehlt, lautet

$$\mu^2-4\lambda\nu = 0,$$

sodass

$$\lambda L = \left(\lambda x+\frac{\mu}{2}\right)^2$$

wird. Der oben gemachten Bemerkung gemäss nehme man

$$\lambda = 1$$

und setze ausserdem, nur die Bezeichnung ändernd,

$$\frac{\mu}{2} = -x_0,$$

so erhält L die Form

$$L = (x-x_0)^2.$$

Der Inhalt der nunmehr zu berücksichtigenden Gleichung (13.) lässt sich dahin aussprechen, dass $M^2-k^2R(x)$ durch L theilbar werden muss. Sind M und k dieser Bedingung gemäss bestimmt, so ergiebt sich N von selbst durch Ausführung einer Division.

Es sei

$$M = m_0+m_1(x-x_0)+m_2(x-x_0)^2.$$

Sind m_0, m_1, m_2 und x_0 gefunden, so kennt man auch λ', μ', ν'. Ferner sei

$$R(x) = r_0+r_1(x-x_0)+r_2(x-x_0)^2+r_3(x-x_0)^3+r_4(x-x_0)^4.$$

Wenn nun $M^2-k^2R(x)$ durch $L=(x-x_0)^2$ theilbar sein, d. h. in diesem

Ausdruck die Glieder mit $(x-x_0)^0$ und $(x-x_0)^1$ fehlen sollen, so müssen die Bedingungen

$$m_0^2 = k^2 r_0,$$
$$2m_0 m_1 = k^2 r_1$$

bestehen. Hieraus folgt, da nach der über die Function $R(x)$ gemachten Annahme r_0 und r_1 nicht gleichzeitig verschwinden können,

$$\frac{m_0}{2m_1} = \frac{r_0}{r_1},$$

sodass man setzen kann:

$$m_0 = -\frac{r_0}{g}, \quad m_1 = -\frac{r_1}{2g}, \quad k^2 = \frac{r_0}{g^2},$$

unter g eine willkürliche Constante verstanden. Es sei noch

$$m_2 = -\frac{h}{g},$$

wo h die Grösse m_2 vertreten soll, so wird

$$M = -\frac{1}{g}\left[h(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}r_1(x-x_0) + r_0\right],$$
$$N = \frac{M^2 - k^2 R(x)}{4L} = \frac{g^2 M^2 - r_0 R(x)}{4g^2(x-x_0)^2}$$
$$= \frac{1}{4g^2}\left[(h^2 - r_0 r_4)(x-x_0)^2 + (hr_1 - r_0 r_3)(x-x_0) + \left(\frac{1}{4}r_1^2 + 2hr_0 - r_0 r_2\right)\right].$$

Man kann sagen, dass durch die für L, M, N gefundenen Ausdrücke die fünf auf S. 8 erwähnten Bedingungsgleichungen und zwei von den noch hinzuzunehmenden Festsetzungen erfüllt werden. Um die noch übrigen Bedingungen aufzustellen, muss man $R_1(x_1)$ bilden.

Es sei

$$Lx_1^2 + Mx_1 + N = L'(x-x_0)^2 + M'(x-x_0) + N',$$

so hat man

$$L' = x_1^2 - \frac{h}{g}x_1 + \frac{h^2 - r_0 r_4}{4g^2} = \left(x_1 - \frac{h}{2g}\right)^2 - \frac{r_0 r_4}{4g^2},$$
$$M' = -\frac{r_1}{2g}x_1 + \frac{hr_1 - r_0 r_3}{4g^2} = -\frac{r_1}{2g}\left(x_1 - \frac{h}{2g}\right) - \frac{r_0 r_3}{4g^2},$$
$$N' = -\frac{r_0}{g}x_1 + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{1}{4}r_1^2 + 2hr_0 - r_0 r_2\right) = -\frac{r_0}{g}\left(x_1 - \frac{h}{2g}\right) - \frac{1}{4g^2}\left(r_0 r_2 - \frac{1}{4}r_1^2\right).$$