CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

CAMBRIDGE LIBRARY COLLECTION

Books of enduring scholarly value

Mathematics

From its pre-historic roots in simple counting to the algorithms powering modern desktop computers, from the genius of Archimedes to the genius of Einstein, advances in mathematical understanding and numerical techniques have been directly responsible for creating the modern world as we know it. This series will provide a library of the most influential publications and writers on mathematics in its broadest sense. As such, it will show not only the deep roots from which modern science and technology have grown, but also the astonishing breadth of application of mathematical techniques in the humanities and social sciences, and in everyday life.

Mathematische Werke

The German mathematician Karl Weierstrass (1815–97) is generally considered to be the father of modern analysis. His clear eye for what was important is demonstrated by the publication, late in life, of his polynomial approximation theorem; suitably generalised as the Stone–Weierstrass theorem, it became a central tool for twentieth-century analysis. Furthermore, the Weierstrass nowhere-differentiable function is the seed from which springs the entire modern theory of mathematical finance. The best students in Europe came to Berlin to attend his lectures, and his rigorous style still dominates the first analysis course at any university. His seven-volume collected works in the original German contain not only published treatises but also records of many of his famous lecture courses. Edited by Johannes Knoblauch (1885–1915) and Georg Hettner (1854–1914), Volume 4 was published in 1902.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

Cambridge University Press has long been a pioneer in the reissuing of out-of-print titles from its own backlist, producing digital reprints of books that are still sought after by scholars and students but could not be reprinted economically using traditional technology. The Cambridge Library Collection extends this activity to a wider range of books which are still of importance to researchers and professionals, either for the source material they contain, or as landmarks in the history of their academic discipline.

Drawing from the world-renowned collections in the Cambridge University Library and other partner libraries, and guided by the advice of experts in each subject area, Cambridge University Press is using state-of-the-art scanning machines in its own Printing House to capture the content of each book selected for inclusion. The files are processed to give a consistently clear, crisp image, and the books finished to the high quality standard for which the Press is recognised around the world. The latest print-on-demand technology ensures that the books will remain available indefinitely, and that orders for single or multiple copies can quickly be supplied.

The Cambridge Library Collection brings back to life books of enduring scholarly value (including out-of-copyright works originally issued by other publishers) across a wide range of disciplines in the humanities and social sciences and in science and technology.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

Mathematische Werke

Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission

Volume 4

Karl Weierstrass
Edited by Georg Hettner
and Johannes Knoblauch

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town,
Singapore, São Paolo, Delhi, Mexico City

Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York

www.cambridge.org
Information on this title: www.cambridge.org/9781108059169

© in this compilation Cambridge University Press 2013

This edition first published 1902
This digitally printed version 2013

ISBN 978-1-108-05916-9 Paperback

This book reproduces the text of the original edition. The content and language reflect the beliefs, practices and terminology of their time, and have not been updated.

Cambridge University Press wishes to make clear that the book, unless originally published by Cambridge, is not being republished by, in association or collaboration with, or with the endorsement or approval of, the original publisher or its successors in title.

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

HERAUSGEGEBEN
UNTER MITWIRKUNG EINER VON DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN EINGESETZTEN COMMISSION.

VIERTER BAND.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

THEORIE DER ABELSCHEN TRANSCENDENTEN.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1902.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

THEORIE DER ABELSCHEN TRANSCENDENTEN

VON

KARL WEIERSTRASS.

BEARBEITET

VON

G. HETTNER UND J. KNOBLAUCH.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1902.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

Übersetzungsrecht vorbehalten.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

VORWORT.

Schon im Jahre 1889 hatte Weierstrass den Wunsch geäussert, die von ihm an der hiesigen Universität gehaltenen Vorlesungen über Abelsche Transcendenten durch uns herausgeben zu lassen. Und zwar sollte sich die Veröffentlichung an die Vorlesungen vom Wintersemester 1875—76 und Sommersemester 1876 anschliessen, weil sich diese durch die Einheitlichkeit ihrer Durchführung ausgezeichnet hatten; die Vorlesungen früherer oder späterer Jahre sollten nur in geringem Umfange zur Ergänzung herangezogen werden.

Ein grosser Theil des Manuscripts ist damals von uns fertig gestellt worden, allein der Druck wurde verschoben, weil Weierstrass sich inzwischen zur Herausgabe seiner Mathematischen Werke entschlossen hatte. Von diesen enthalten die drei ersten Bände die von ihm verfassten Abhandlungen, die folgenden Bände die Vorlesungen, soweit sie zur Veröffentlichung bestimmt sind. Dass die über Abelsche Transcendenten zuerst erscheinen, hat seinen Grund in dem oben Gesagten; voraussichtlich werden zunächst die über elliptische Functionen folgen.

Obgleich die im vorliegenden Bande enthaltenen Vorlesungen von Weierstrass stets unter dem Titel »Theorie der Abelschen Functionen« angekündigt worden sind, haben wir sie doch mit seiner Zustimmung als solche über Abelsche Transcendenten bezeichnet, weil die Theorie der Abelschen Functionen im eigentlichen Sinne darin nur kurz skizzirt ist, während die grundlegenden algebraischen Untersuchungen und die Theorie der Abelschen Integrale genau durchgeführt sind.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

Der Veröffentlichung liegen die Ausarbeitungen zu Grunde, die wir seiner Zeit nach den Vorlesungen der beiden vorher erwähnten Semester angefertigt haben. Nur für das 26., 28. und die erste Hälfte des 29. Kapitels konnten wir uns auf ein Manuscript stützen, das Weierstrass früher bei seinen Zuhörern in Umlauf gesetzt hatte. Andere für die Vorlesungen angefertigte Entwürfe oder sonstige Aufzeichnungen, die wir hätten benutzen können, haben sich auch in seinem Nachlasse nicht vorgefunden. Für die zweite Hälfte des 29., das 30. und das 34. Kapitel sind die Ausarbeitungen von G. Valentin und C. Weltzien aus dem Wintersemester 1873—74 und die beiden ersten Paragraphen des Buches von F. Schottky »Abriss einer Theorie der Abelschen Functionen von drei Variabeln« (Leipzig 1880) mit herangezogen worden.

Weierstrass selbst hat von dem Inhalt dieses Bandes nur zu einem kleinen Theile Kenntniss genommen; als er am 19. Februar 1897 starb, war der Druck erst bis zum achtzehnten Bogen vorgeschritten.

Berlin, den 12. März 1902.

Georg Hettner. Johannes Knoblauch.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

INHALTS-VERZEICHNISS.

Seite

Einleitung . . . . . 1—10.

Grundbegriffe der Theorie der Abelschen Transcendenten S. 1—9. Historische Bemerkungen S. 9—10.

Erster Abschnitt.

Algebraische Grundlage der Theorie . . . . . 11—246.

Erstes Kapitel. Das algebraische Gebilde . . . . . 13—45.

Das durch eine irreductible Gleichung $f(x, y) = 0$ definirte algebraische Gebilde; Stelle oder Punkt (xy); Monogeneität S. 13. Singuläre Stellen S. 14. Element des Gebildes; äquivalente Elemente S. 16. Ordnung einer algebraischen Gleichung in Bezug auf die Stelle $(0, 0)$ S. 19. Für die Umgebung einer singulären Stelle lässt sich $f(x, y) = 0$ durch ein System von Gleichungen erster Ordnung ersetzen S. 19—30. Die Umgebung jeder singulären Stelle kann durch eine endliche Anzahl von Elementen dargestellt werden S. 30—32. Mehrfache Stellen; unendlich ferne Stellen S. 32. Die Anzahl der unendlich fernen Stellen ist gleich der Dimension von $f(x, y)$ S. 34—36. Unendlich ferne Elemente S. 36—41. Das im Unendlichen reguläre Gebilde S. 38. y als algebraische Function von x S. 41—45. Singuläre Werthe des Arguments dieser algebraischen Function S. 42.

Zweites Kapitel. Rationale Functionen des Paares (xy) . . . . . 46—86.

Erklärung einer solchen Function S. 46. Erste Methode der Bestimmung der Werthepaare (xy), für die eine rationale Function $R(xy)$ einen gegebenen, endlichen und von Null verschiedenen Werth s annimmt S. 47—50. Das Product $\prod_{(x)}(s - R(x\overset{x}{y}))$ ist, als Function von s betrachtet, entweder unzerlegbar oder Potenz einer unzerlegbaren Function S. 47—48. Grad von $R(xy)$ S. 50. Zweite Methode der Bestimmung der Werthepaare, für die $R(xy) = s$ wird S. 50—52. $s = 0$ S. 52—55. $s = \infty$ S. 56. Rationale Transformation eines algebraischen Gebildes S. 56—59. Bildung einer rationalen Function, die an einer einzigen Stelle von der ersten Ordnung unendlich gross wird, wenn x und y durch eine allgemeine Gleichung zweiten Grades verbunden sind S. 61. Algebraische Curven mit der Maximalzahl von Doppelpunkten S. 62. Herstellung einer Function $F(xy, x'y')$, die ausser für die

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

Seite

beliebige Stelle $(x'y')$ nur an solchen Stellen unendlich gross wird, die nicht für sich allein ein vollständiges System von Unendlichkeitsstellen einer rationalen Function bilden können S. 62—68. Rang eines algebraischen Gebildes S. 69. Seine Unveränderlichkeit bei einer rationalen Transformation S. 69—70. Erklärung der Function $H(xy, x'y')$ S. 73. Entwickelung von $H(x_t y_t, x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau}$ S. 73—78. Erklärung der Functionen $H(xy)_\alpha$, $H'(xy)_\alpha$ und $H(xy, ab)_\mu$ S. 79. Grundformeln für $H(xy, ab)_\mu$ S. 84. Grundformeln für $H(xy, x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}$ S. 85. Fundamentaleigenschaft der Functionen $H(xy)_\alpha$ S. 86.

Drittes Kapitel. Darstellung einer rationalen Function des Paares (xy) durch die Function $H(xy, x'y')$ . . . . . 87—103.

Ist y eine rationale Function einer Variablen x, so ist $\Sigma\left[y_t\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}} = 0$ S. 87—89. Für eine rationale Function $F(xy)$ ist $\Sigma\left[F(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}} = 0$ S. 89—95. Darstellung einer gegebenen rationalen Function des Paares (xy) in der Form $C_0 + \sum_\nu \sum_\varkappa C_\nu^{(\varkappa)} H(xy, x_\nu y_\nu)_\varkappa$ S. 95—97. Bildung einer rationalen Function mit s gegebenen Unendlichkeitsstellen und $s-\varrho$ gegebenen Nullstellen S. 98—103.

Viertes Kapitel. Die ϱ linear unabhängigen Functionen $H(xy)_\alpha$ . . . . 104—116.

Jede Function $H(xy)$ mit der Fundamentaleigenschaft der Functionen $H(xy)_\alpha$ lässt sich als homogenes lineares Aggregat von $H(xy)_1, \ldots H(xy)_\varrho$ darstellen S. 105. Diese ϱ Functionen selbst sind linear unabhängig S. 105—107. Eigenschaften und Form der Functionen $H(xy)_\alpha$ S. 108—116.

Fünftes Kapitel. Erste Art der Berechnung des Ranges eines algebraischen Gebildes . . . . . 117—145.

Rationale Transformation des Gebildes der Art, dass die zu $x = \infty$ gehörigen Werthe von y endlich und von einander verschieden sind S. 117. Der Grad s von $H(xy)$ S. 118—125. $\varrho = \frac{s}{2} - (n-1)$ S. 125. Zerfallen die Entwickelungen der n Werthe der algebraischen Function y in n' Gruppen, so ist $s = \Sigma(n-n')$ S. 127. Bedeutungslosigkeit der über das Gebilde gemachten speciellen Annahme S. 128—130. Bestimmung des Ranges und der Functionen $H(xy)_\alpha$ für ein hyperelliptisches Gebilde S. 130—135; für ein Gebilde der Form $y^n = R(x)$ S. 135—145.

Sechstes Kapitel. Zweite Art der Berechnung des Ranges eines algebraischen Gebildes . . . . . 146—175.

Anzahl der gemeinsamen Stellen zweier algebraischen Gebilde S. 146—155. Für ein im Unendlichen reguläres Gebilde $\varphi(\xi, \eta) = 0$, dessen Dimension und Grad in Bezug auf η übereinstimmend gleich r sind, ist $\varrho = \frac{1}{2}(r-1)(r-2) - \frac{1}{2}\Sigma k_\lambda$, wenn die Entwickelung von $\frac{\frac{d\xi_t}{dt}}{\varphi(\xi_t \eta_t)_2}$ mit der Potenz t^{-k_λ} beginnt S. 155—160. Ausdehnung des Ergebnisses auf ein beliebiges algebraisches Gebilde S. 160—165. Berechnung von Σk_λ aus den Ordnungszahlen der Gleichungen, die sich bei der Darstellung der Umgebung der singulären Stellen des Gebildes mittels successiver Transformation ergeben S. 165—171. Berechnung des Ranges für Gebilde specieller Beschaffenheit S. 171—175.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

Seite

Siebentes Kapitel. Die Bildung der Functionen $H(xy)_\alpha$ . . . . . 176—192.

$H(xy)_\alpha$ für ein Gebilde ohne singuläre Stellen S. 177; für ein beliebiges Gebilde S. 178—187. Untersuchung des Falles, wo sich für jede singuläre Stelle des Gebildes nach einmaliger Transformation nur Gleichungen erster Ordnung ergeben S. 187—192.

Achtes Kapitel. Die Bildung der Function $H(xy, x'y')$ . . . . . 193—210.

Beschränkung der Untersuchung auf den vorher (S. 187) betrachteten speciellen Fall S. 193. Genauere Erörterung der Bildungsweise von $H(xy, x'y')$ S. 195—197. $H(xy, x'y')$ als Function des Paares $(x'y')$ betrachtet S. 197—199. Die rationale Function $E(xy, x'y')$ und ihr Zusammenhang mit $H(xy, x'y')$ S. 199—205. Die Function $\overline{H}(xy, x'y')$ mit ϱ willkürlichen Constanten S. 206—208. Darstellung von $H(xy, x'y')$ durch $\overline{H}(xy, x'y')$ S. 209.

Neuntes Kapitel. Die Bildung einer rationalen Function des Paares (xy) mit einer einzigen Unendlichkeitsstelle . . . . . 211—225.

Für jede Stelle (ab) giebt es eine Zahl k der Art, dass rationale Functionen $(k+1)^{\text{ten}}, (k+2)^{\text{ten}}, \ldots$ Grades existiren, die nur an dieser Stelle unendlich gross werden S. 211—216. Rationale Transformation des Gebildes in ein solches mit einem einzigen unendlich fernen Element S. 216—218. Die Function $\overline{H}(\xi\eta, \xi'\eta')$ S. 219—223. Erklärung und Grundeigenschaften der Functionen $\overline{H}(\xi\eta)_\alpha$ S. 223—224. Für jede Stelle (ab) eines Gebildes lassen sich rationale Functionen mit der einzigen Unendlichkeitsstelle (ab) und zwar von jedem Grade bilden mit Ausnahme von ϱ fehlenden Graden $\varkappa_1, \ldots \varkappa_\varrho$. Nur für eine beschränkte Anzahl Stellen (ab) sind die Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\varrho$ von $1, 2, \ldots \varrho$ verschieden S. 224—225. Grundformeln für $\overline{H}(\xi\eta, \xi_\tau\eta_\tau)\frac{d\xi_\tau}{d\tau}$ S. 225.

Zehntes Kapitel. Die charakteristischen Eigenschaften der algebraischen Functionen . . . . . 226—246.

Bedingung für das Congruiren zweier Elemente eines algebraischen Gebildes S. 227. Über den Convergenzbereich der ein Element des Gebildes darstellenden Reihen $y = P(x-a)$, $y = P\left((x-a)^{\frac{1}{\sigma}}\right)$, $y = P\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)$ S. 228—235. Je zwei Elemente eines irreductiblen algebraischen Gebildes congruiren unmittelbar oder durch Einschaltung einer endlichen Anzahl vermittelnder Elemente S. 235—241. Monogeneität; ein algebraisches Gebilde kann durch eine endliche Anzahl von Elementen vollständig dargestellt werden S. 241. Die charakteristischen Eigenschaften einer algebraischen Function S. 242—244; einer rationalen Function des Paares (xy) S. 244—246.

Zweiter Abschnitt.

Die Abelschen Integrale . . . . . 247—438.

Elftes Kapitel. Einleitung in die Theorie der Abelschen Integrale . . . 249—257.

Erklärung des Integrals einer rationalen Function des Paares (xy) S. 249. Beweis der Formel $\frac{d}{dx}H(xy, x'y') - \frac{d}{dx'}H(x'y', xy) = \sum_\alpha \left\{H(x'y')_\alpha H'(xy)_\alpha - H(xy)_\alpha H'(x'y')_\alpha\right\}$ S. 251—254. Eigenschaften der Functionen $H'(xy)_\alpha$ S. 254—256. Grundformeln für $H'(xy)_\alpha$ und $H(xy)_\alpha$ S. 257.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

Seite

Zwölftes Kapitel. Die Integrale erster, zweiter und dritter Art . . . . 258—275.

Erklärung der Integrale erster und zweiter Art S. 258; des Integrals dritter Art S. 259. Ausdruck einer rationalen Function des Paares (xy) mittels der Functionen $H(x_\nu y_\nu, xy)$, $H(xy)_\alpha$ und $H'(xy)_\alpha$ S. 260—264. Jedes Abelsche Integral lässt sich durch solche der drei Arten, vermehrt um einen algebraischen Ausdruck, darstellen S. 265. Eindeutigkeit dieser Darstellung S. 265—266. Ist das Integral einer rationalen Function des Paares (xy) algebraisch, so ist es selbst als rationale Function des Paares (xy) darstellbar S. 267—269. Die Function $G(xy, x'y')$ und ihre Eigenschaften S. 269—273. Ihr Ausdruck für das hyperelliptische Gebilde S. 273—274. Ihr Zusammenhang mit den Functionen $H'(xy)_\alpha$ S. 274.

Dreizehntes Kapitel. Die Perioden des Logarithmus . . . . . 276—294.

Erklärung von $\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$, wo $F(x)$ eine rationale Function von x ist S. 277—281. Integrationsweg; das vollständige Integral $\overline{\int} F(x)\,dx$ S. 281. Die Function $L(x)$ S. 282—290. Kriterium für die positive und die negative Seite einer Geraden S. 288. Die Werthe $\overset{+}{L}(x)$ und $\overline{L}(x)$ für die Punkte der Geraden $(-\infty \ldots 0)$ S. 289. Darstellung des über einen bestimmten Integrationsweg erstreckten Integrals $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x}$ durch Werthe von $L(x)$ S. 290—293. Die primitive Periode dieses Integrals S. 293—294..

Vierzehntes Kapitel. Die vollständigen Integrale algebraischer Differentiale 295—303.

Erklärung eines Abelschen Integrals für einen bestimmten Integrationsweg S. 295—299. Kreis von Werthepaaren; geschlossener Integrationsweg; vollständiges Integral S. 299. Variation eines Kreises S. 300. Einfache und zusammengesetzte Integrationswege S. 301. Bedingung für die algebraische Ausführbarkeit eines Abelschen Integrals S. 303.

Fünfzehntes Kapitel. Die Function $\Omega(xy)$ . . . . . 304—316.

$\Omega(xy; x_1 y_1, x_0 y_0)$ S. 305. $\Omega(xy)$ S. 306—310. Simultane Perioden der Integrale erster und zweiter Art S. 306. $\overset{+}{\Omega}(x_0 y_0) - \overline{\Omega}(x_0 y_0) = 2\pi i$ S. 310. Schnitte von Integrationslinien S. 311. $\sum_\alpha (\eta_\alpha \overline{\omega}_\alpha - \omega_\alpha \overline{\eta}_\alpha) = \frac{1}{2}\varepsilon\pi i$ S. 313. $E(xy)$ S. 313—315. Ausdruck der Functionen $H(xy)_\alpha$ und $H'(xy)_\alpha$ durch logarithmische Ableitungen von E-Functionen S. 316.

Sechzehntes Kapitel. Die Perioden der Abelschen Integrale erster und zweiter Art . . . . . 317—339.

Positive Seite einer gebrochenen Linie S. 317. Durchkreuzung eines Integrationsweges durch einen anderen in bestimmtem Sinne S. 318. Es lassen sich ϱ Paare von Kreisen K_α, K'_α der Art bestimmen, dass der Kreis K'_α den Kreis K_α einmal in positivem Sinne durchkreuzt, während Kreise aus verschiedenen Paaren sich nicht schneiden S. 318—329. Einführung der $4\varrho^2$ Grössen $2\omega_{\alpha\beta}$, $2\omega'_{\alpha\beta}$, $2\eta_{\alpha\beta}$, $2\eta'_{\alpha\beta}$ als Werthe der über die Kreise K_β und K'_β erstreckten Integrale erster und zweiter Art; die $\varrho(2\varrho-1)$ Relationen unter diesen Grössen S. 330. Historische Bemerkungen S. 330—331. Zweites System von Relationen unter den $4\varrho^2$ Grössen S. 332. Ausdruck eines beliebigen Periodensystems der Integrale erster und zweiter

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

Seite

Art durch $2\omega_{\alpha\beta}$, $2\omega'_{\alpha\beta}$, $2\eta_{\alpha\beta}$, $2\eta'_{\alpha\beta}$ S. 334. Simultane oder zusammengehörige Perioden mehrerer Integralfunctionen S. 335. Primitives System simultaner Perioden S. 336. Für die Integrale erster und zweiter Art bilden $2\omega_{\alpha\beta}$, $2\omega'_{\alpha\beta}$, $2\eta_{\alpha\beta}$, $2\eta'_{\alpha\beta}$ ein solches System S. 337—338.

Siebzehntes Kapitel. Die Perioden der hyperelliptischen Integrale . . . 340—363.

Die Function $H(xy, x'y')$ für das hyperelliptische Gebilde S. 340—343. Die Functionen $H(xy)_\alpha$ und $H'(xy)_\alpha$ S. 344. Vollständiges Integral des Differentials $\frac{dx}{\sqrt{(x-a')(x-a'')}}$, erstreckt über den Umfang einer Ellipse mit den Brennpunkten a' und a'' S. 345—352. Erklärung einer positiven complexen Grösse; Hauptwerth der Quadratwurzel aus einer complexen Grösse S. 349. Das Integral $\overline{\int}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ S. 352—359. Die simultanen Perioden der Integrale erster und zweiter Art S. 359—361. Die Kreise K_α, K'_α S. 361.

Achtzehntes Kapitel. Die Functionen $E(xy)_\beta$ und $E'(xy)_\beta$ . . . . . 364—376.

Die nicht verschwindende E-Function S. 365—366. $E(xy\,|\,\omega_1, \ldots \omega_\varrho)$ S. 367—370. $E(xy)_\beta$ und $E'(xy)_\beta$ S. 371. Darstellung von $E(xy\,|\,\omega_1, \ldots \omega_\varrho)$ durch ein Product von Functionen $E(xy)_\beta$ und $E'(xy)_\beta$ S. 371—372. Die Integralfunctionen erster und zweiter Art $J(xy)_\alpha$ und $J'(xy)_\alpha$ S. 373. Darstellung von $J(xy)_\alpha$ und $J'(xy)_\alpha$ durch Logarithmen von $E(xy)_1, \ldots E(xy)_\varrho$, $E'(xy)_1, \ldots E'(xy)_\varrho$ S. 374—376.

Neunzehntes Kapitel. Die Functionen $\Omega(xy;\, x_1y_1,\, x_0y_0)$ und $E(xy;\, x_1y_1,\, x_0y_0)$ 377—393.

$\Omega(xy;\, x_1y_1, x_0y_0)$ S. 377—382. Grundformeln für diese Function S. 382. $E(xy;\, x_1y_1, x_0y_0)$ S. 383—386. Jede rationale Function des Paares (xy) ist als Product transcendenter Primfunctionen darstellbar S. 387—390. Analogie der transcendenten Primfunctionen mit den Kummerschen idealen Primfactoren S. 391—393.

Zwanzigstes Kapitel. Darstellung des Integrals dritter Art durch Logarithmen der E-Functionen . . . . . 394—400.

Die Integralfunction dritter Art $J(xy;\, x_1y_1, x_0y_0)$ S. 396. Darstellung von $J(xy;\, x_1y_1, x_0y_0)$ durch Logarithmen von $E(xy;\, x_1y_1, x_0y_0)$, $E(xy)_1, \ldots E(xy)_\varrho$, $E'(xy)_1, \ldots E'(xy)_\varrho$ S. 396—399. Das periodische Verhalten des Integrals dritter Art S. 399.

Einundzwanzigstes Kapitel. Das Abelsche Theorem . . . . . 401—438.

Historische Bemerkungen zum Abelschen Theorem S. 401. Ausspruch des Theorems für die Integrale erster, zweiter und dritter Art S. 403—404. Sind $(x_\nu y_\nu)$ die Nullstellen und $(x'_\nu y'_\nu)$ die Unendlichkeitsstellen einer rationalen Function, so ist $\sum_\nu \int_{(x'_\nu y'_\nu)}^{(x_\nu y_\nu)} H(xy)_\beta\, dx = 0$ für $\beta = 1, 2, \ldots \varrho$ S. 405—407. Beweis des Theorems für die Integrale erster Art S. 407—417. Die Umkehrung des Abelschen Theorems für die Integrale erster Art S. 417—419. Im Allgemeinen ist die Darstellung einer Summe von Integralen erster Art durch ϱ Integrale nur auf eine Weise möglich S. 419. Die verschiedenen Bedeutungen der Zahl ϱ S. 421. Beweis des Theorems für das Integral dritter Art S. 422; für das Integral einer beliebigen rationalen Function des Paares (xy) S. 423—426. Das Theorem für die Integrale

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

Seite

zweiter Art S. 427—428. Beweis des Theorems für das Integral einer beliebigen rationalen Function auf dem von Abel eingeschlagenen Wege S. 428—437. Integration eines mit dem Abelschen Theorem zusammenhängenden Systems von Differentialgleichungen für den Fall des hyperelliptischen Gebildes S. 437.

Dritter Abschnitt.

Die Abelschen Functionen . . . . . 439—624.

Zweiundzwanzigstes Kapitel. Definition der Abelschen Functionen . . . 441—466.

Das Umkehrungsproblem in der Theorie der elliptischen Transcendenten S. 441—444. Aufstellung des Jacobischen Umkehrungsproblems S. 444—446. Die durch die Gleichungen $u_\beta = \sum_\alpha \int_{(a_\alpha b_\alpha)}^{(x_\alpha y_\alpha)} H(xy)_\beta \, dx \quad (\beta = 1, 2, \ldots \varrho)$ definirten Functionenelemente x_α und y_α S. 446—448. Ihr algebraisches Additionstheorem S. 448—450. Für jedes endliche Werthsystem $(u_1, \ldots u_\varrho)$ ergeben sich $x_1, \ldots x_\varrho$ als Wurzeln einer Gleichung ϱ^{ten} Grades, deren Coefficienten Potenzreihen von $u_1, \ldots u_\varrho$ sind; y_α ist eine rationale Function von x_α mit Coefficienten derselben Beschaffenheit S. 450—456. Die singulären Werthsysteme der Argumente $u_1, \ldots u_\varrho$ S. 456—460. Ihre Gesammtheit bildet ein Continuum von $2\varrho - 4$ Dimensionen S. 459. Die rationalen symmetrischen Functionen von $(x_1 y_1), \ldots (x_\varrho y_\varrho)$ S. 461. Abelsche Functionen S. 462. Ihr algebraisches Additionstheorem S. 462—463. Ihre 2ϱ-fache Periodicität S. 464—466.

Dreiundzwanzigstes Kapitel. Die Functionen $E(xy; u_1, u_2, \ldots u_\varrho)$ und $J(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_\beta$ . . . . . 467—479.

Erklärung und charakteristische Eigenschaften von $E(xy; u_1, \ldots u_\varrho)$ S. 469—471. Für alle endlichen Werthsysteme $(u_1, \ldots u_\varrho)$ ist $E(xy; u_1, \ldots u_\varrho)$ eindeutig definirt S. 471—475. Verhalten von $E(xy; u_1, \ldots u_\varrho)$ bei Änderung von $u_1, \ldots u_\varrho$ um ein System simultaner Perioden $2\omega_1, \ldots 2\omega_\varrho$ S. 475. Erklärung von $J(u_1, \ldots u_\varrho)_\beta$ S. 476. $dJ(u_1, \ldots u_\varrho)_\beta = \sum_\alpha H'(x_\alpha y_\alpha)_\beta \, dx_\alpha$ S. 477. $J(u_1 + 2\omega_1, \ldots)_\beta = J(u_1, \ldots)_\beta + 2\eta_\beta$ S. 478—479.

Vierundzwanzigstes Kapitel. Darstellung der Function $E(xy, x_0 y_0; u_1, \ldots u_\varrho)$ durch einen Quotienten zweier beständig convergenten Potenzreihen 480—512.

Erklärung und Eigenschaften von $E(xy, x_0 y_0; u_1, \ldots u_\varrho)$ S. 480. Nachweis, dass sich diese Function als Quotient zweier beständig convergenten Potenzreihen darstellen lässt S. 481—511. Ausdruck durch die Function $f(u_1, \ldots u_\varrho)$ S. 510. $E(xy; u_1, \ldots u_\varrho)$ in der Theorie der hyperelliptischen Transcendenten S. 511—512.

Fünfundzwanzigstes Kapitel. Einführung der Function $\Theta(u_1, \ldots u_\varrho)$ . . . 513—523.

Fundamentaleigenschaften von $f(u_1, \ldots u_\varrho)$ S. 513—515. Erklärung und Fundamentaleigenschaften von $\Theta(u_1, \ldots u_\varrho)$ S. 516. Darstellung von $E(xy, x_0 y_0; u_1, \ldots u_\varrho)$ durch $\Theta(u_1, \ldots u_\varrho)$ S. 518. Die Gleichung $\Theta(u_1 + a_1, \ldots) = A\,\Theta(u_1, \ldots) . e^{\sum b_\alpha u_\alpha}$ besteht nur, wenn $(a_1, \ldots a_\varrho, b_1, \ldots b_\varrho)$ ein System simultaner Perioden der Integrale erster und zweiter Art ist S. 520. Die bei der Darstellung von $\Theta(u_1, \ldots u_\varrho)$ in Betracht kommende Determinante $|\omega_{\alpha\beta}|$ S. 523.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

Seite

Sechsundzwanzigstes Kapitel. Die Determinante $|\omega_{\alpha\beta}|$ . . . . . 524—530.

Beweis der Existenz eines Systems simultaner Perioden der Integrale erster Art, für das die Determinante nicht verschwindet S. 524—529. Für dieses System bleiben die 2ϱ Fundamentalgleichungen von $\Theta(u_1, \dots u_\varrho)$ ihrer Form nach ungeändert S. 529.

Siebenundzwanzigstes Kapitel. Einführung der Function $\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)$ . . . 531—538.

Erklärung dieser Function; ihre Periodicität in Bezug auf jedes einzelne Argument S. 533. Einführung der Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ S. 535. Bei einer Vermehrung von v_α um $\tau_{\alpha\beta}$ ändert sich die ϑ-Function um einen Exponentialfactor S. 537.

Achtundzwanzigstes Kapitel. Darstellung der Function $\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)$ . . . 539—554.

Der Fouriersche Lehrsatz für eine periodische Function einer Variablen S. 539—541; für eine periodische Function von ϱ Variablen S. 542—544. Anderer Beweis für die Darstellbarkeit einer periodischen Function durch eine trigonometrische Reihe S. 544—549. Darstellung der Function $\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)$ S. 550—552; der Function $\Theta(u_1, \dots u_\varrho)$ S. 552—553. Historische Bemerkungen S. 553.

Neunundzwanzigstes Kapitel. Beweis für das Nichtverschwinden der Determinante $|\omega_{\alpha\beta}|$ . . . . . 555—565.

Nachweis des Nichtverschwindens von $|\omega_{\alpha\beta}|$ mittels der Eigenschaften der Θ-Function S. 556—560. Die $2\varrho^2$ Grössen $2\omega_{\alpha\beta}$, $2\omega'_{\alpha\beta}$ bilden ein primitives Periodensystem der Integrale erster Art S. 560—564. Hülfssatz über homogene lineare Functionen mit verschwindender Determinante S. 561. Eine Abelsche Function von ϱ Variablen ist nicht weniger als 2ϱ-fach periodisch S. 564—565.

Dreissigstes Kapitel. Die allgemeinen Thetafunctionen . . . . . 566—584.

Bedingung für die Convergenz der Reihe $\sum_{(n)} e^{G(u_1, \dots u_\varrho; n_1, \dots n_\varrho)}$, wo $G(u_1, \dots u_\varrho; n_1, \dots n_\varrho)$ eine allgemeine ganze Function zweiten Grades bedeutet S. 568. Erklärung der allgemeinen Function $\Theta(u_1, \dots u_\varrho)$; die für sie geltenden 2ϱ Fundamentalgleichungen S. 568—571. Die allgemeine Function $\Theta(u_1, \dots u_\varrho; \mu, \mu')$ mit 2ϱ Parametern S. 571—573. Ihr Zusammenhang mit $\Theta(u_1, \dots u_\varrho)$ S. 573—574. Relationen zwischen Θ-Functionen mit verschiedenen Parametern S. 574—576. Die 2ϱ Fundamentalgleichungen für $\Theta(u_1, \dots u_\varrho; \mu, \mu')$ S. 576—578. Die allgemeine Function $\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)$ S. 578—580. Unterschied der allgemeinen ϑ-Function und der durch Lösung des Umkehrungsproblems sich ergebenden S. 580. Die allgemeine Function $\vartheta(v_1, \dots v_\varrho; \mu, \mu')$ mit 2ϱ Parametern S. 581—582. Die Thetafunctionen mit ganzzahligen Parametern sind gerade oder ungerade S. 582—584.

Einunddreissigstes Kapitel. Darstellung der Abelschen Integrale zweiter und dritter Art mit Hülfe der Θ-Function . . . . . 585—599.

Über die in der Definitionsgleichung für die Θ-Function auftretenden Constanten S. 585—596. Grad der Function $H'(xy)_\alpha + \sum_\beta K_\beta H(xy)_\beta$ S. 588—590. Darstellung des Integrals dritter Art durch Logarithmen von Θ-Functionen S. 596—598; der Integrale zweiter Art durch Θ-Functionen und deren Ableitungen S. 598—599.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05916-9 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 4
Karl Weierstrass Edited by Georg Hettner and Johannes Knoblauch
Frontmatter
More information

Seite

Zweiunddreissigstes Kapitel. Die Werthsysteme, für welche die Θ-Function verschwindet . . . . . 600—603.

Nicht singuläre Werthsysteme S. 600—603. Singuläre Werthsysteme S. 603.

Dreiunddreissigstes Kapitel. Darstellung Abelscher Functionen . . . . 604—610.

Ausdruck von Functionen der Form $\prod_\alpha F(x_\alpha y_\alpha)$ durch Θ-Functionen S. 604—607. Das Product $\prod_{(\varkappa)} \frac{\Theta(u_1 - \overset{\varkappa}{u}_1, \ldots)}{\Theta(u_1 - \overset{\varkappa}{v}_1, \ldots)}$ ist eine Abelsche Function, wenn $\sum_{(\varkappa)} \overset{\varkappa}{u}_\alpha = \sum_{(\varkappa)} \overset{\varkappa}{v}_\alpha$ ist S. 608—609. Gleiches gilt für $\frac{\Theta^2(u_1, \ldots; \mu, \mu')}{\Theta^2(u_1, \ldots)}$ bei ganzzahligen Werthen der Parameter S. 610.

Vierunddreissigstes Kapitel. Relationen unter Producten von Thetafunctionen 611—624.

Die Functionen $\Pi(u_1, \ldots u_\varrho)$ und $\Pi(u_1, \ldots u_\varrho; v, v')$ S. 611—614. Darstellung von $\Pi(u_1, \ldots u_\varrho)$ durch eine Summe von transformirten Thetafunctionen S. 614—617. Verallgemeinerung S. 618—620. Homogene lineare Relation zwischen $2^\varrho + 1$ Producten von je zwei Θ-Functionen mit gewissen ganzzahligen Parametern S. 620—622. Folgerungen S. 622—623. Ist $\varphi_n(u_1, \ldots u_\varrho) = \frac{\Theta(u_1, \ldots; \mu, \mu')}{\Theta(u_1, \ldots; \bar{\mu}, \bar{\mu}')}$, so lässt sich $\varphi_n(u_1 + v_1, \ldots)$ rational durch Functionen derselben Beschaffenheit mit den einfachen Argumenten $u_1, \ldots u_\varrho$ und $v_1, \ldots v_\varrho$ darstellen S. 624.

Alphabetisches Inhalts-Verzeichniss . . . . . 625—631.

Bemerkungen und Berichtigungen . . . . . 632.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org