CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05915-2 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 3
Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch
Excerpt
More information

ÜBER DIE ANALYTISCHE DARSTELLBARKEIT SOGENANNTER WILLKÜRLICHER FUNCTIONEN REELLER ARGUMENTE.

(Aus dem Sitzungsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 9. und 30. Juli 1885.)

1.

Das Hauptergebniss der nachstehenden Untersuchung lässt sich, wenn man sich zunächst auf Functionen einer Veränderlichen beschränkt, folgendermaassen aussprechen:

Es sei x eine reelle Veränderliche, welche jeden dem Intervall $(-\infty \cdots +\infty)$ angehörigen Werth annehmen kann, ferner bedeute $f(x)$ eine reelle und durchweg continuirliche Function von x, so lässt sich stets auf mannigfaltige Weise eine Reihe von ganzen Functionen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ der Art bilden, dass für jeden der betrachteten Werthe von x

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

ist. Dabei ist die Reihe $f_1(x) + f_2(x) + \cdots$ in jedem endlichen Intervalle gleichmässig convergent.

Ist $f(x)$ eine für jeden reellen Werth der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und stetige Function, deren absoluter Betrag eine endliche obere Grenze hat, so gilt bekanntlich die nachstehende Gleichung, in der u eine zweite reelle Veränderliche bedeutet und unter k eine von x und u unabhängige positive Grösse zu verstehen ist:

$$(1.)\qquad \operatorname*{Lim}_{k=0} \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = f(x).$$

Der in dieser Gleichung ausgesprochene Satz lässt sich leicht verallgemeinern.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

Cambridge University Press
978-1-108-05915-2 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 3
Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch
Excerpt
More information

Es werde irgend eine Function $\psi(x)$ von derselben Beschaffenheit wie $f(x)$ angenommen, welche ihr Zeichen nicht ändert, der Gleichung $\psi(-x) = \psi(x)$ genügt und überdies der Bedingung entspricht, dass das Integral

$$\int_0^{+\infty} \psi(x)\,dx$$

einen endlichen Werth haben muss, der mit ω bezeichnet werden möge. Setzt man dann

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du, \tag{2.}$$

so ist

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} F(x,k) = f(x). \tag{3.}$$

In Betreff des Beweises der Gleichungen (1.) und (3.) möge Folgendes bemerkt werden. Es seien a_1, a_2, b_1, b_2 positive Grössen, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, so hat man

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\int_{-b_1}^{b_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du - \frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
&\qquad = \frac{1}{k}\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{k}\int_{a_2}^{b_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
&\qquad = f(-b_1 \cdots -a_1)\int_{\frac{a_1+x}{k}}^{\frac{b_1+x}{k}} \psi(u)\,du + f(a_2 \ldots b_2)\int_{\frac{a_2-x}{k}}^{\frac{b_2-x}{k}} \psi(u)\,du.^{*)}
\end{aligned}$$

In Verbindung mit den in Betreff der Functionen $f(x)$, $\psi(x)$ gemachten Annahmen lehrt diese Gleichung, dass das Integral

$$\frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

wenn man den Grössen x, k bestimmte Werthe giebt und dann a_1, a_2 unabhängig von einander unendlich gross werden lässt, sich einer bestimmten

*) Ich bezeichne mit $f(x_1 \ldots x_2)$ einen Mittelwerth zwischen dem kleinsten und grössten derjenigen Werthe, welche $f(x)$ in dem Intervall von $x = x_1$ bis $x = x_2$ annimmt.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05915-2 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 3
Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch
Excerpt
More information

endlichen Grenze nähert, und somit das Integral

$$\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

eine wohldefinirte Grösse ist.

Dies festgestellt, sei nun δ eine beliebig klein anzunehmende positive Grösse, so ist

$$\begin{aligned}
F(x,k) &= \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{x-\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{2k\omega}\int_{x+\delta}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
&\quad + \frac{1}{2k\omega}\int_{x-\delta}^{x} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{2k\omega}\int_{x}^{x+\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
&= \frac{1}{2\omega} f(-\infty\ldots x-\delta)\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega} f(x+\delta\cdots+\infty)\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du \\
&\quad + \frac{1}{2\omega}\int_{0}^{\frac{\delta}{k}} (f(x-ku)+f(x+ku))\,\psi(u)\,du.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
F(x,k)-f(x) &= \frac{f(-\infty\cdots+\infty)-f(x)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du \\
&\quad + \frac{1}{2\omega}\int_{0}^{\frac{\delta}{k}} (f(x-ku)+f(x+ku)-2f(x))\,\psi(u)\,du \\
&= \frac{f(-\infty\cdots+\infty)-f(x)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du \\
&\quad + \frac{1}{2}\varepsilon_1(f(x-\varepsilon\delta)+f(x+\varepsilon\delta)-2f(x)),
\end{aligned}$$

wo ε, ε_1 positive, zwischen 0 und 1 enthaltene Grössen bedeuten.

Nun seien x_1, x_2 irgend zwei bestimmte Werthe von x, G die obere Grenze für den absoluten Betrag von $f(x)$, und g_1, g_2 zwei positive Grössen, die beliebig klein angenommen werden können. Dann kann man zunächst der Grösse δ einen so kleinen Werth geben, dass der absolute Betrag von

$$\frac{1}{2}(f(x-u)+f(x+u)-2f(x))$$

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05915-2 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 3
Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch
Excerpt
More information

stets kleiner als g_1 ist, wenn x in dem Intervall $(x_1 \dots x_2)$, und zugleich u in dem Intervall $(0 \dots \delta)$ angenommen wird. Hat man einen solchen Werth von δ fixirt, so kann man ferner eine positive Grösse k' so bestimmen, dass für jeden Werth von k, der $< k'$,

$$\frac{2G}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du < g_2,$$

also vermöge der vorstehenden Gleichung die Differenz zwischen $F(x,k)$ und $f(x)$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als g_1+g_2 ist, und zwar für jeden der betrachteten Werthe von x.

Hiermit ist also nicht nur bewiesen, dass $F(x,k)$ für jeden einzelnen Werth von x der Grenze $f(x)$ sich nähert, wenn k unendlich klein wird, sondern auch, dass die Annäherung für alle einem endlichen Intervalle angehörigen Werthe von x eine gleichmässige ist.

Aus der Gleichung (3.) ziehe ich nun eine bemerkenswerthe Folgerung.

Unter den Functionen $\psi(x)$, welche den oben angegebenen Bedingungen entsprechen, giebt es unzählige, welche transcendente ganze Functionen und zugleich so beschaffen sind, dass auch die zugehörigen Functionen $F(x,k)$ für jeden bestimmten Werth der Grösse k in beständig convergirende Potenzreihen von x entwickelt werden können. Nimmt man für $\psi(x)$ eine derartige Function, z. B. $\psi(x) = e^{-xx}$, so ergiebt sich der folgende Satz:

A. »Ist $f(x)$ eine nur für reelle Werthe der Veränderlichen x eindeutig definirte und durchweg stetige Function, so lässt sich auf mannigfaltige Weise eine transcendente g a n z e Function $F(x,k)$ herstellen, welche ausser x noch einen veränderlichen (positiven) Parameter k enthält und so beschaffen ist, dass für jeden reellen Werth von x die Gleichung

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} F(x,k) = f(x)$$

besteht.«

Unter der Bedingung, dass die Veränderliche x auf irgend ein endliches Intervall beschränkt werde, kann man ferner, wie gezeigt worden ist, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g', dem Parameter k einen so kleinen Werth k' geben, dass für jeden Werth von x die Differenz zwischen

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05915-2 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 3
Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch
Excerpt
More information

$F(x, k')$ und $f(x)$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als g' ist. Stellt man sodann $F(x, k')$ in der Form einer Potenzreihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

dar und bezeichnet die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe mit $G(x)$, so kann man, nach Annahme einer anderen positiven Grösse g'', dem n einen so grossen Werth geben, dass für jeden dem angenommenen Intervall angehörigen Werth von x der absolute Betrag von $F(x, k') - G(x)$ kleiner als g'', mithin der absolute Betrag von $f(x) - G(x)$ kleiner als $g' + g''$ ist.

Damit ist bewiesen:

B. »Ist $f(x)$ eine Function von der angegebenen Beschaffenheit, und wird die Veränderliche x auf irgend ein endliches Intervall beschränkt, so lässt sich, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g, auf mannigfaltige Weise eine ganze rationale Function $G(x)$ bestimmen, welche in dem festgesetzten Intervalle sich der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass die Differenz $f(x) - G(x)$ ihrem absoluten Betrage nach beständig kleiner als g ist.«

Nun nehme man zwei unendliche Reihen positiver Grössen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$
$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \ldots$$

so an, dass $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} a_n = \infty$ ist und $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ einen endlichen Werth hat; dann kann man dem Vorstehenden gemäss eine Reihe von ganzen rationalen Functionen

$$G_1(x),\ G_2(x),\ G_3(x),\ \ldots$$

so bestimmen, dass (für $\nu = 1, 2, \ldots \infty$)

$$|f(x) - G_\nu(x)| < g_\nu$$

ist, wenn x in dem Intervall $(-a_\nu \ldots a_\nu)$ liegt. Setzt man sodann

$$f_0(x) = G_1(x), \quad f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x),$$

so ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) = G_{n+1}(x)$$

und für jeden bestimmten Werth von x

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_{n+1}(x) = f(x);$$

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

Cambridge University Press
978-1-108-05915-2 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 3
Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch
Excerpt
More information

woraus sich

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

ergiebt.

Nun seien x_1, x_2 irgend zwei bestimmte, endliche Werthe von x, so ergiebt sich aus den Ungleichheiten

$$\begin{aligned} &|f(x) - G_\nu(x)\;\;| < g_\nu, && (-a_\nu \leqq x \leqq a_\nu) \\ &|f(x) - G_{\nu+1}(x)| < g_{\nu+1}, && (-a_{\nu+1} \leqq x \leqq a_{\nu+1}) \end{aligned}$$

dass für jeden dem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ angehörigen Werth von x

$$|f_\nu(x)| < g_\nu + g_{\nu+1}$$

ist, sobald ν grösser ist als eine bestimmte Zahl ν', die dadurch definirt wird, dass jedes Intervall $(-a_\nu \ldots a_\nu)$, für welches $\nu > \nu'$, die Werthe x_1, x_2 beide enthalten muss. Man hat also

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} |f_\nu(x)| < \sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} (g_\nu + g_{\nu+1}), \quad \text{wenn } x_1 \leqq x \leqq x_2;$$

und es convergirt demzufolge die Reihe

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} f_\nu(x)$$

und somit auch die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

unbedingt und *gleichmässig* für die dem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ angehörigen Werthe von x. Es ist aber die Wahl der Grössen x_1, x_2 keiner andern Beschränkung unterworfen, als dass sie endliche reelle Werthe haben müssen, und die Functionen $f_\nu(x)$ sind unabhängig von denselben; die vorstehende Reihe convergirt also unbedingt für *jeden* Werth von x und gleichmässig in jedem Intervall

$$x_1 \leqq x \leqq x_2,$$

dessen Grenzen endliche Werthe haben. Es gilt also das Theorem:

C. »Jede Function $f(x)$ von der angegebenen Beschaffenheit lässt sich auf mannigfaltige Weise darstellen in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder *ganze rationale* Functionen von x sind; diese Reihe con-

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05915-2 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 3
Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch
Excerpt
More information

vergirt unbedingt für jeden endlichen Werth von x, und gleichmässig in jedem Intervalle $(x_1 \dots x_2)$, dessen Grenzen endliche Grössen sind.«

In Betreff des Satzes B. ist zu bemerken, dass man zur Begründung desselben nur anzunehmen braucht, es sei $\psi(x)$ eine transcendente ganze Function, welche für reelle Werthe von x die im Vorstehenden angegebenen Eigenschaften besitzt, nicht aber, dass auch $F(x, k)$ eine ganze Function von x sei, was keine nothwendige Folge der ersteren Annahme ist.

Setzt man nämlich, unter a, b zwei beliebig anzunehmende reelle Grössen verstehend,

$$F_1(x, k) = \frac{1}{2k\omega}\int_a^b f(u)\,\psi\!\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

so hat man für reelle Werthe von x

$$F(x, k) = F_1(x, k) + \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{x-a}{k}}^{+\infty} f(x-ku)\,\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{b-x}{k}}^{+\infty} f(x+ku)\,\psi(u)\,du$$

und kann also, wenn a, b, x_1, x_2 der Bedingung

$$a < x_1 < x_2 < b$$

gemäss angenommen werden, und eine beliebig kleine positive Grösse g_1 gegeben ist, den Werth von k so fixiren, dass für jeden dem Intervalle $(x_1 \dots x_2)$ angehörigen Werth von x der absolute Betrag der Differenz $f(x) - F_1(x, k)$ kleiner als g_1 ist. Dies vorausgesetzt, kann man ferner, da $F_1(x, k)$ unbedingt eine (transcendente) ganze Function von x ist, nach Annahme irgend einer zweiten positiven Grösse g_2, eine *ganze rationale* Function $G(x)$ so bestimmen, dass in dem Intervall $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$

$$| G(x) - F_1(x, k) | < g_2,$$

also

$$| f(x) - G(x) | < g_1 + g_2$$

ist; was den Satz B. giebt.

Dieser Beweis des in Rede stehenden Satzes ist, wie ich glaube, vollkommen streng und reicht aus, wenn nur gezeigt werden soll, dass ganze rationale Functionen $G(x)$, welche sich einer gegebenen Function $f(x)$ in allen Punkten eines beliebig angenommenen Intervalls $(x_1 \dots x_2)$ so genau an-

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

Cambridge University Press
978-1-108-05915-2 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 3
Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch
Excerpt
More information

schliessen, wie man will, existiren und auch wirklich bestimmt werden können. Dagegen leidet die im Vorstehenden angegebene Bildungsweise solcher Functionen an einem wesentlichen Mangel. Setzt man

$$F_1(x, k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (k)_\nu x^\nu,$$

wo $(k)_\nu$ eine Function von k ist, für die sich der Ausdruck

$$(k)_\nu = \frac{(-1)^\nu}{2\omega k^\nu \nu!} \int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} f(ku) \frac{d^\nu \psi(u)}{du^\nu} du$$

ergiebt, und

$$G^{(n)}(x, k) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (k)_\nu x^\nu;$$

so existiren zwar, wenn irgend eine positive Grösse δ gegeben ist, Werthe von k und n, für welche in dem Intervall $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$

$$|f(x) - G^{(n)}(x, k)| < \delta$$

ist; es wird aber, wenn δ unendlich klein wird, k ebenfalls unendlich klein, und es tritt der Ubelstand ein, dass aus dem vorstehenden Ausdruck von $(k)_\nu$ nicht zu ersehen ist, ob derselbe, wenn k unendlich klein wird, einer endlichen Grenze sich nähere oder doch wenigstens endlich bleibe, was unbedingt erforderlich ist, wenn auf die in Rede stehende Weise für einen beliebig kleinen Werth δ ein brauchbarer Annäherungsausdruck der Function $f(x)$ sich soll herstellen lassen.

Diesem Übelstande lässt sich aber folgendermaassen abhelfen.

Es bedeute $f(x)$, wie im Vorhergehenden, eine für jeden reellen Werth der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und stetige Function, deren absoluter Betrag eine endliche obere Grenze (G) hat. Dagegen sei $\psi(x)$ eine transcendente ganze Function, von der zunächst nur angenommen wird, dass sie reell sei für reelle Werthe von x, und der Bedingung $\psi(-x) = \psi(x)$ genüge. Ferner seien u, v reelle, von einander unabhängige Veränderliche, und es werde

$$\sqrt{\psi(u+vi)\,\psi(u-vi)} = \psi(u, v)$$

gesetzt, wo der Quadratwurzel ihr positiver Werth beizulegen ist. Dann ist

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05915-2 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 3
Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch
Excerpt
More information

der absolute Betrag von $\frac{\psi(u+vi)}{\psi(u,v)}$ gleich 1, und man hat daher, wenn a, b reelle Grössen sind,

$$(4.)\quad \int_a^b f(u)\,\psi(u+vi)\,du = \int_a^b f(u)\frac{\psi(u+vi)}{\psi(u,v)}\cdot\psi(u,v)\,du = \varepsilon G\int_a^b \psi(u,v)\,du,$$

wo ε eine complexe Grösse, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, bezeichnet. Angenommen nun, es sei $\psi(x)$ so beschaffen, dass das Integral

$$\int_0^{+\infty}\psi(u,v)\,du$$

für jeden Werth von v einen endlichen Werth hat, so erhalten, wenn a_1, a_2, b_1, b_2 positive Grössen sind, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, die Integrale

$$\int_{a_2}^{b_2}\psi(u,v)\,du,\quad \int_{-b_1}^{-a_1}\psi(u,v)\,du,$$

von denen das zweite (weil $\psi(-u,v) = \psi(u,v)$) gleich

$$\int_{a_1}^{b_1}\psi(u,v)\,du$$

ist, beide unendlich kleine Werthe, wenn a_1, a_2 unendlich gross werden. Dasselbe gilt also, der vorstehenden Gleichung zufolge, für die Integrale

$$\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\,\psi(u+vi)\,du,\quad \int_{a_2}^{b_2} f(u)\,\psi(u+vi)\,du;$$

und es hat demnach das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\,du$$

einen bestimmten endlichen Werth für jeden Werth von v.

Ich will ferner annehmen, es convergire das Integral

$$\int_{a_2}^{+\infty}\psi(u,v)\,du,$$

wenn a_2 unendlich gross wird, für alle Werthe von v, deren absoluter Betrag einen beliebig festgesetzten Grenzwerth nicht übersteigt, gleichmässig

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-05915-2 - Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission: Volume 3
Karl Weierstrass Edited by Johannes Knoblauch
Excerpt
More information

gegen die Grenze Null, so gilt der Gleichung (4.) zufolge dasselbe von dem Integral

$$\int_{a_2}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\,du,$$

und ebenso, wenn a_1 unendlich gross wird, von

$$\int_{-\infty}^{-a_1} f(u)\,\psi(u+vi)\,du.$$

Es lassen sich also, wenn V, g gegebene positive Grössen sind, von denen V beliebig gross und g beliebig klein sein kann, immer zwei positive Grössen a_1, a_2 so bestimmen, dass der absolute Betrag der Differenz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\,du - \int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi(u+vi)\,du$$

für jeden der Bedingung

$$-V \leqq v \leqq V$$

entsprechenden Werth von v kleiner als g ist.

Nun sei $x = \xi + \xi' i$ eine complexe Veränderliche und, wie im Vorangehenden, k eine positive Constante, $\omega = \int_0^{+\infty} \psi(u)\,du$. Dann ist also nach dem Vorstehenden das Integral

$$(5.)\qquad \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi+ku)\,\psi\left(u-\frac{\xi' i}{k}\right)du = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

eine für jeden endlichen Werth von x eindeutig definirte, endliche Grösse, die oben mit $F(x,k)$ bezeichnet worden ist.

Es muss nun nachgewiesen werden, dass $F(x,k)$ eine (transcendente) ganze Function von x ist.

Man setze für den absoluten Betrag von x eine obere Grenze r fest, so kann man, nach Annahme zweier beliebig kleinen positiven Grössen g', g'', zwei andere a_1, a_2 bestimmen, für welche der absolute Betrag der Summe

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{-\frac{a_1+\xi}{k}} f(\xi+ku)\,\psi\left(u-\frac{\xi' i}{k}\right)du + \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{a_2-\xi}{k}}^{+\infty} f(\xi+ku)\,\psi\left(u-\frac{\xi' i}{k}\right)du$$

für alle der Bedingung

$$\xi^2+\xi'^2 \leqq r^2$$

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org