ÜBER EINE GATTUNG REELL PERIODISCHER FUNCTIONEN.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 22. Februar 1866.)

1.

Geometrische und mechanische Probleme führen nicht selten auf eine Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = F(x),$$

in der die von einander abhängigen Veränderlichen t, x reelle Grössen bedeuten und F eine gegebene eindeutige Function von x ist.

Ein besonderes Interesse hat der Fall, wo x eine periodische und stets endlich bleibende Function von t ist. Dies tritt ein, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) Es verschwindet $F(x)$ für zwei reelle Werthe a, b von x;

2) der Quotient $\frac{(x-a)(b-x)}{F(x)}$, welcher mit $\frac{1}{F_1(x)}$ bezeichnet werde, ändert sein Zeichen nicht und wird nicht unendlich, so lange x in dem Intervall $a \ldots b$ bleibt;

3) für irgend einen bestimmten Werth von t ist der zugehörige von x in diesem Intervall enthalten.

Man setze nämlich, $b > a$ annehmend und unter v eine neue reelle Veränderliche verstehend,

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos v,$$

so ist

$$x-a = \frac{b-a}{2}(1-\cos v), \qquad b-x = \frac{b-a}{2}(1+\cos v),$$
$$(x-a)(b-x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \sin^2 v,$$
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a-b}{2}\sin v\,\frac{dv}{dt};$$

und es wird also die gegebene Differentialgleichung befriedigt, wenn man v so bestimmt, dass

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{F_1\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos v\right)}$$

ist, wobei der Quadratwurzel ihr positiver Werth beigelegt werde.

Nun werde ferner

$$F_1\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos v\right) \text{ mit } f(\cos v)$$

und das Integral

$$\int_0 \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}} \text{ mit } \psi(v)$$

bezeichnet, so ist $\psi(v)$ eine Function, welche, wenn v beständig wachsend alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, ebenfalls stetig wachsend von $-\infty$ in $+\infty$ übergeht. Daraus folgt, wenn man

$$\psi(v) = w$$

setzt, dass zu jedem reellen Werthe von w ein Werth von v gehört, der sich stetig mit jenem ändert; oder mit anderen Worten, dass es eine ganz bestimmte continuirliche Function $\varphi(w)$ giebt, die für v gesetzt die vorstehende Gleichung befriedigt. Nimmt man also, unter τ eine beliebige Constante verstehend,

$$v = \varphi(t+\tau)$$

an, so hat man

$$t+\tau = \psi(v), \qquad dt = \psi'(v)\,dv, \qquad \frac{dv}{dt} = \sqrt{f(\cos v)},$$

und es wird die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = F(x)$$

befriedigt, wenn man

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos[\varphi(t+\tau)]$$

setzt.

Es lässt sich aber auch leicht zeigen, dass dieser Ausdruck jede Function darstellt, die unter den gemachten Voraussetzungen der Differentialgleichung genügt. Denn es ist stets möglich, τ so zu bestimmen, dass für einen gegebenen Werth t_0 von t nicht nur x einen in dem Intervall $a \dots b$ willkürlich angenommenen Werth x_0, sondern auch $\frac{dx}{dt}$ ein vorgeschriebenes Zeichen erhält. Es folgt nämlich aus dem vorstehenden Ausdrucke von x

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b-a}{2}\sin[\varphi(t+\tau)]\,\varphi'(t+\tau),$$

und es hat daher, da $\varphi'(t+\tau) = \frac{dv}{dt}$ positiv ist, $\sin[\varphi(t+\tau)]$ stets dasselbe Zeichen wie $\frac{dx}{dt}$. Man braucht daher, um den angegebenen Bedingungen Genüge zu leisten, nur einen Bogen v_0 so zu bestimmen, dass

$$x_0 = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos v_0$$

wird und zugleich $\sin v_0$ das Zeichen von $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0}$ erhält, und dann

$$\tau = \psi(v_0) - t_0$$

zu nehmen, so dass $v_0 = \varphi(t_0 + \tau)$ wird.

Aus der Formel

$$\frac{d\psi(v)}{dv} = \frac{1}{\sqrt{f(\cos v)}}$$

ergiebt sich

$$\frac{d\psi(v+2\pi)}{dv} = \frac{d\psi(v)}{dv},$$

und hieraus

$$\psi(v+2\pi) = \psi(v) + 2\omega,$$

wo ω eine positive Constante bedeutet. Da nun

$$t + \tau = \psi(v),$$

so folgt

$$t + 2\omega + \tau = \psi(v+2\pi),$$
$$\varphi(t+2\omega+\tau) = \varphi(t+\tau) + 2\pi;$$

1*

und es ist daher

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos[\varphi(t+\tau)]$$

eine Function, die ihren Werth nicht ändert, wenn t um ein beliebiges Vielfaches von 2ω vermehrt oder vermindert wird.

Ferner wird

$$\begin{array}{llll} \text{für } t = -\tau: & v = 0, & x = a; \\ \text{für } t = -\tau+\omega: & v = \pi, & x = b; \\ \text{für } t = -\tau+2\omega: & v = 2\pi, & x = a; \end{array}$$

woraus sich weiter ergiebt, dass x die Grenzwerthe a, b unzählige Mal erhält, den ersteren für $t = -\tau + 2\nu\omega$, wo (wie überall im Folgenden) ν eine beliebige ganze Zahl bedeuten soll, und den anderen für $t = -\tau + (2\nu+1)\omega$. Auch folgt aus dem in Betreff des Zeichens von $\frac{dx}{dt}$ Bemerkten, dass x bei einem solchen Übergange von einer Grenze zur anderen beständig wächst oder beständig abnimmt.

Aus der Gleichung

$$\psi(v+2\pi) = \psi(v) + 2\omega$$

erhält man, wenn man $v = -\pi$ setzt und bemerkt, dass

$$\psi(-v) = -\psi(v)$$

ist,

$$\omega = \psi(\pi) = \int_0^\pi \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{F(x)}},$$

wo $\sqrt{F(x)}$ positiv zu nehmen ist.

Führt man jetzt eine neue Veränderliche $u = \frac{\pi}{\omega}(t+\tau)$ ein, so wird $\cos v$ eine gerade Function von u mit der Periode 2π und kann daher in der Form

$$\cos v = A_0 + 2A_1 \cos u + 2A_2 \cos 2u + \cdots + 2A_n \cos nu + \cdots$$

dargestellt werden, wo A_0, A_1, ... Constanten sind, die sich als bestimmte Integrale folgendermassen ausdrücken lassen.

Zunächst hat man

$$\pi A_n = \int_0^\pi \cos v \cos nu\, du.$$

Es geht aber, der Gleichung

$$u = \frac{\pi}{\omega}(t+\tau) = \frac{\pi}{\omega}\psi(v)$$

zufolge, u stetig wachsend von 0 in π über, wenn v das Intervall $0 \dots \pi$ durchläuft, und es ergiebt sich daher, da

$$du = \frac{\pi}{\omega}\frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}}$$

ist,

$$A_n = \frac{1}{\omega}\int_0^\pi \cos v \cos\left(\frac{n\pi}{\omega}\psi(v)\right)\frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}}.$$

Ganz ebenso erhält man, wenn $G(x)$ eine beliebige, für alle in dem Intervalle $a \dots b$ liegenden Werthe von x eindeutig bestimmte und stetige Function ist,

$$G(x) = B_0 + 2B_1 \cos u + \cdots + 2B_n \cos nu + \cdots,$$

$$B_n = \frac{1}{\omega}\int_0^\pi G(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\omega}\psi(v)\right)\frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}},$$

wo für x der Ausdruck

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos v$$

zu setzen ist.

Durch partielle Integration erhält man ferner, wenn $n > 0$ ist,

$$A_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \sin v \sin\left(\frac{n\pi}{\omega}\psi(v)\right)dv$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \cos\left(\frac{n\pi}{\omega}\psi(v) - v\right)dv - \frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \cos\left(\frac{n\pi}{\omega}\psi(v) + v\right)dv.$$

$G(x)$ aber kann man stets auf die Form

$$G_0 + G_1 \cos v + G_2 \cos 2v + \cdots$$

bringen und deshalb, da

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\pi \cos \nu v \cos\left(\frac{n\pi}{\omega}\psi(v)\right)\frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}} = \frac{\nu}{n\pi}\int_0^\pi \sin \nu v \sin\left(\frac{n\pi}{\omega}\psi(v)\right)dv$$

ist, B_n aus den in der Formel

$$\frac{\nu}{2n\pi}\int_0^\pi \cos\left(\frac{n\pi}{\omega}\,\psi(v)-\nu v\right)dv$$

enthaltenen bestimmten Integralen zusammensetzen.

Als ein einfaches Beispiel für die Anwendung dieser Formeln erinnere ich an die Aufgabe, den Radiusvector eines Planeten und dessen Potenzen durch die Zeit auszudrücken, welche von Bessel und Hansen in der hier dargestellten Weise behandelt worden ist.

In den meisten Fällen aber, selbst wenn die Function $F(x)$ eine einfache Form hat, sind die Coefficienten A_n, B_n sehr complicirt zusammengesetzte Grössen, deren direkte Entwicklung aus den aufgestellten Ausdrücken schwierig erscheint. Man kann sie jedoch fast immer durch ein Verfahren bestimmen, welches das Eigenthümliche hat, ohne jede Integration zum Ziele zu führen, und zugleich sehr geeignet ist, eine Einsicht in die Zusammensetzungsweise der zu entwickelnden Grössen zu gewähren und so auch bei der Ermittelung angenäherter Ausdrücke für dieselben, mit denen man sich oft begnügen kann, wesentliche Dienste zu leisten.

2.

Ich nehme an, es sei die Function $F(x)$ nicht bloss für reelle Werthe von x, sondern auch für alle complexen innerhalb eines die Strecke $a \ldots b$ in sich enthaltenden Bereiches eindeutig definirt, und so beschaffen, dass $F_1(x)$ weder Null noch unendlich gross wird. Es wird kaum ein der analytischen Behandlung überhaupt zugänglicher Fall vorkommen, wo dies nicht zutrifft.

Setzt man dann, unter α, β, ξ, η reelle Grössen verstehend,

$$v = \alpha+\beta i, \qquad x = \xi+\eta i,$$

so hat man

$$\xi = \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos\beta i\cos\alpha,$$

$$\eta = \qquad -\frac{a-b}{2}\,\frac{\sin\beta i}{i}\sin\alpha.$$

Hiernach ist, wenn man β einen bestimmten Werth beilegt, α aber veränderlich lässt, der Ort des die complexe Grösse x repräsentirenden Punktes, dessen Coordinaten ξ, η sind, eine Ellipse mit den Brennpunkten a, b und den Halbaxen $\frac{b-a}{2}\cos\beta i$, $\frac{b-a}{2}\frac{\sin\beta i}{i}$. Setzt man daher fest, es solle β stets in dem Intervalle $-\beta_0 \cdots +\beta_0$ bleiben, α aber alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen können, so liegt der Punkt x stets im Innern oder auf dem Umfange derjenigen Ellipse, die zu dem Werthe β_0 gehört. Diese kann man nun, wenn man nur die positive Grösse β_0 hinlänglich klein annimmt, der die Punkte a, b verbindenden Geraden so nahe sich anschliessen lassen, dass die Function $F_1(x)$ für alle so limitirten Werthe von x die angegebene Eigenschaft besitzt. Wird dann bestimmt, dass $\sqrt{F_1(x)}$ für $x = a$ positiv sein soll, so sind dadurch und durch die im Folgenden stets festzuhaltende Bedingung, dass x beim Übergange von einem Werthe zum anderen nicht aus dem angegebenen Bereich heraustreten darf, $\sqrt{F_1(x)}$ und $\frac{1}{\sqrt{F_1(x)}}$ als eindeutige und continuirliche Functionen von x, und somit auch von v, vollständig definirt. Und da dieselben ihren Werth nicht ändern, wenn $\pm v + 2\nu\pi$ für v gesetzt wird, so kann man $\frac{1}{\sqrt{F_1(x)}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{f(\cos v)}}$ durch eine für alle jetzt in Betracht kommenden Werthe von v convergirende Reihe

$$a_0 + 2a_1\cos v + 2a_2\cos 2v + \cdots$$

darstellen. Setzt man dann

$$a_0 v + 2a_1 \sin v + 2a_2\frac{\sin 2v}{2} + \cdots = \psi(v),$$

so ist $\psi(v)$ für reelle Werthe von v dieselbe Function wie die im Vorhergehenden so bezeichnete, und somit

$$\omega = a_0\pi.$$

Jetzt werde eine Function z von v durch die Formel

$$z = e^{\frac{\pi i}{\omega}\psi(v)}$$

definirt, so lässt sich zeigen, dass wenn α stetig wachsend von einem bestimmten Werthe α_0 in $\alpha_0 + 2\pi$ übergeht, während β unverändert bleibt, der Punkt z eine einfache geschlossene Linie beschreibt, welche ganz innerhalb oder ganz ausserhalb eines mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschriebenen Kreises liegt, je nachdem β positiv oder negativ ist, während sie, wenn $\beta = 0$, mit diesem Kreise zusammenfällt, vorausgesetzt, dass der Grenzwerth β_0

hinlänglich klein angenommen werde. Setzt man nämlich

$$\psi(\alpha+\beta i) = p+qi, \qquad z = e^{-\frac{\pi}{\omega}q} . e^{\frac{\pi i}{\omega}p},$$

so ist

$$p = a_0\alpha + 2a_1 \cos\beta i \sin\alpha + 2a_2 \cos 2\beta i \frac{\sin 2\alpha}{2} + \cdots,$$

$$q = a_0\beta + 2a_1 \frac{\sin\beta i}{i}\cos\alpha + 2a_2 \frac{\sin 2\beta i}{i}\frac{\cos 2\alpha}{2} + \cdots,$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial\alpha} = a_0 + 2a_1 \cos\beta i \cos\alpha + 2a_2 \cos 2\beta i \cos 2\alpha + \cdots.$$

Für $\beta \doteq 0$ wird

$$\frac{\partial p}{\partial\alpha} = \frac{1}{\sqrt{f(\cos\alpha)}}, \qquad \frac{q}{\beta} = a_0 = \frac{\omega}{\pi},$$

und es sind also beide Grössen positiv, woraus erhellt, dass bei hinlänglicher Kleinheit von β_0

$$\frac{\partial p}{\partial\alpha} \text{ stets positiv}$$

sein und

$$q \text{ das Zeichen von } \beta$$

haben wird. Dann geht, wenn p_0 der Werth von p für $\alpha = \alpha_0$ ist, $\frac{\pi p}{\omega}$ beständig wachsend von $\frac{\pi p_0}{\omega}$ in $\frac{\pi p_0}{\omega}+2\pi$ über, während α das Intervall $\alpha_0 \ldots \alpha_0+2\pi$ durchläuft, und es dreht sich die den Nullpunkt mit dem Punkte z verbindende Gerade beständig im positiven Sinne. Ferner ist

$$e^{-\frac{\pi}{\omega}q} \gtreqless 1, \text{ je nachdem } \beta \lesseqgtr 0;$$

womit das Behauptete bewiesen ist.

Man stelle sich nun vor, es durchlaufe v den Umfang des durch die vier Punkte

$$-\beta_0 i, \quad 2\pi-\beta_0 i, \quad 2\pi+\beta_0 i, \quad \beta_0 i$$

bestimmten Rechtecks in dem durch diese Aufeinanderfolge festgesetzten Sinne, so beschreibt der Punkt z zuerst von einer bestimmten Stelle z_0 aus im positiven Sinne eine einfache geschlossene Linie (l_0), die ganz im Äusseren des eben genannten Kreises liegt, geht dann dem Nullpunkt sich nähernd zu einer innerhalb des Kreises liegenden Stelle z_1 über, beschreibt von da aus, stets innerhalb des Kreises bleibend, im negativen Sinne eine zweite einfache geschlossene Linie (l_1), und kehrt darauf von z_1 nach z_0 zurück, denselben Weg, den er beim Übergange von z_0 zu z_1 genommen, im entgegengesetzten Sinne durchlaufend. Nach einem bekannten Satze entspricht also jedem Punkte z in dem von den Linien l_0, l_1 begrenzten Ringe ein Punkt v des Rechtecks, der mit ihm durch die Gleichung

$$z = e^{\frac{\pi i}{\omega}\psi(v)}$$

verbunden ist; wobei jedoch von den beiden Seiten des Rechtecks, die durch die Punkte 0, 2π gehen, eine ausgeschlossen werden muss. Und da z unverändert bleibt, wenn $v+2\nu\pi$ für v gesetzt wird, so erhält man aus diesem einen Werthe von v alle übrigen, die für denselben Werth von z die vorstehende Gleichung befriedigen, wenn man zu ihm alle Vielfachen von 2π addirt. Hieraus folgt nun, dass e^{vi} eine eindeutige und continuirliche Function von z ist.

Nun sei ϱ der grösste Werth, den $e^{-\frac{\pi}{\omega}q}$, nachdem man $\beta=\beta_0$ gesetzt hat, annehmen kann, so ist nach dem Vorhergehenden $\varrho<1$ und zugleich $\frac{1}{\varrho}$ der kleinste Werth von $e^{-\frac{\pi}{\omega}q}$, wenn $\beta=-\beta_0$ genommen wird. Legt man also der Veränderlichen z nur solche Werthe bei, die dem absoluten Betrage nach nicht kleiner als ϱ und nicht grösser als $\frac{1}{\varrho}$ sind, so gehören diese alle dem von den Linien l_0, l_1 begrenzten Bereiche an, und zugleich lässt sich alsdann e^{vi} in eine Reihe

$$\begin{aligned}&c_0+c_1 z \;\;+c_2 z^2 \;+\cdots\\ &\quad+c_1' z^{-1}+c_2' z^{-2}+\cdots\end{aligned}$$

entwickeln. Daraus folgt, wenn man $-v$ für v, mithin $\frac{1}{z}$ für z setzt,

$$\begin{aligned}e^{-vi} = {}& c_0+c_1 z^{-1}+c_2 z^{-2}+\cdots\\ &\quad+c_1' z \;\;+c_2' z^2 \;+\cdots,\end{aligned}$$

und man hat daher die Gleichung

$$\cos v = A_0+A_1(z+z^{-1})+A_2(z^2+z^{-2})+\cdots,$$

wo

$$A_0 = c_0, \qquad A_n = \frac{1}{2}(c_n+c_n')$$

ist, für jeden Werth von v, bei dem der absolute Betrag von

$$e^{\frac{\pi i}{\omega}\psi(v)}$$

nicht ausserhalb der angegebenen Grenzen liegt.

Setzt man nun

$$v = \varphi(t+\tau),$$

wo $\varphi(t+\tau)$ wieder die oben definirte reelle Function von t bedeutet, so ist

$$t+\tau = \psi(v),$$

$$\cos v = A_0 + 2A_1 \cos\frac{\pi}{\omega}(t+\tau) + 2A_2 \cos\frac{2\pi}{\omega}(t+\tau) + \cdots,$$

und daher sind $A_0, A_1, A_2, \ldots$ dieselben Grössen wie vorhin. Es geht aber aus der vorstehenden Deduction hervor, dass die durch die Gleichung

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\left(A_0 + 2A_1 \cos\frac{\pi}{\omega}(t+\tau) + \cdots\right)$$

definirte Function von t nicht nur für reelle Werthe dieser Grösse der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = F(x)$$

genügt, sondern auch für jeden complexen Werth, dessen zweite Coordinate — d. h. der reelle Theil von $\frac{t}{i}$ — ihrem absoluten Betrage nach eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Diese kann nicht grösser als $\frac{\omega}{\pi}\,lg\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ sein; doch ist dies nicht nothwendig ihr wahrer Werth, indem durch das Vorhergehende nur nachgewiesen wird, dass es überhaupt eine solche Grenze giebt. Je grösser aber dieselbe ist, um so stärker convergirt die Reihe für x bei reellen Werthen von t.

Aus der Gleichung

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\left(A_0 + A_1(z+z^{-1}) + A_2(z^2+z^{-2}) + \cdots\right),$$

oder

$$x = C_0 + C_1(z+z^{-1}) + C_2(z^2+z^{-2}) + \cdots,$$

wo

$$C_0 = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}A_0, \qquad C_n = \frac{a-b}{2}A_n,$$