ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER MODULAR-FUNCTIONEN.

In der Einleitung zu dem »Précis d'une théorie des fonctions elliptiques« von Abel (Crelle's Journal, B. 4, S. 244; vgl. B. 6, S. 76) findet sich die Bemerkung, dass die Modular-Function $\operatorname{sn} u$ — von Abel a. a. O. durch $\lambda(u)$ bezeichnet — ausgedrückt werden könne als Quotient zweier nach ganzen Potenzen von u fortschreitenden und beständig convergirenden Reihen, deren Coefficienten ganze Functionen des Moduls sind. Der vorliegende Aufsatz enthält einen Versuch, die Entwicklung dieser Reihen, sowie ähnlicher für die übrigen Modular-Functionen, auszuführen und zugleich nachzuweisen, wie von ihnen auf eine einfache Weise zu den übrigen bekannten Darstellungen dieser Functionen übergegangen werden kann. Es erschien zweckmässig, bei der ganzen Entwicklung nur die Fundamental-Eigenschaften der Modular-Functionen vorauszusetzen, sowie auch besonders darauf gesehen worden ist, die Gültigkeit der Formeln auch für imaginäre Werthe des Arguments und des Moduls zu zeigen.

§ 1.

Aus den zur Definition der Modular-Functionen $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ mit dem gemeinschaftlichen Modul k dienenden Differential-Gleichungen

$$(1.)\quad \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \qquad \frac{\partial \operatorname{cn} u}{\partial u} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \qquad \frac{\partial \operatorname{dn} u}{\partial u} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u,$$

zu denen noch die nähere Bestimmung kommt, dass für $u = 0$ $\operatorname{sn} u = 0$, $\operatorname{cn} u = 1$, $\operatorname{dn} u = 1$ sein soll, lassen sich für diese Functionen zunächst unendliche Reihen von der Form

$$(2.)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn} u = u + a_1 u^3 + \cdots + a_r u^{2r+1} + \cdots \\ \operatorname{cn} u = 1 + b_1 u^2 + \cdots + b_r u^{2r} + \cdots \\ \operatorname{dn} u = 1 + c_1 u^2 + \cdots + c_r u^{2r} + \cdots \end{cases}$$

herleiten, in welchen die Coefficienten ganze Functionen von k^2 sind, deren nähere Kenntniss für den gegenwärtigen Zweck nicht erforderlich ist. Diese Reihen können nun zwar nicht immer convergent sein, wie man sich leicht überzeugt; man darf aber annehmen, dass sie es für jeden reellen und imaginären Werth von u sind, dessen absoluter Betrag eine bestimmte, von dem jedesmaligen Werthe des Moduls abhangende Grenze nicht überschreitet. [1]) Aus den Formeln, welche $\operatorname{sn}(u+v)$, $\operatorname{cn}(u+v)$, $\operatorname{dn}(u+v)$ durch $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ ausdrücken, ist ferner sofort ersichtlich, dass sich $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ rational durch $\operatorname{sn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{cn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{dn}\frac{u}{n}$ ausdrücken lassen, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, in der Art, dass man

$$(3.)\qquad \operatorname{sn} u = \frac{P}{S}, \qquad \operatorname{cn} u = \frac{Q}{S}, \qquad \operatorname{dn} u = \frac{R}{S}$$

hat, wo P, Q, R, S ganze Functionen von $\operatorname{sn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{cn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{dn}\frac{u}{n}$ sind. Werden für $\operatorname{sn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{cn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{dn}\frac{u}{n}$ ihre Reihen-Entwicklungen substituirt, so gehen auch P, Q, R, S in unendliche, nach ganzen Potenzen von u fortschreitende Reihen über; und wenn angenommen wird, dass die Reihen (2.) convergiren, sobald der absolute Betrag von u kleiner als eine bestimmte Grösse a ist, so sind die Reihen für $\operatorname{sn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{cn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{dn}\frac{u}{n}$ und demnach auch die Reihen-Entwicklungen von P, Q, R, S convergent für jedes u, dessen absoluter Betrag kleiner als na ist. Da nun na mit n ohne Ende wächst, so steht zu erwarten, dass P, Q, R, S für $n = \infty$ in solche Reihen übergehen, die beständig convergiren, und man auf diesem Wege zu Entwicklungen der Modular-Functionen gelangen werde, die für jeden beliebigen Werth des Arguments gültig bleiben. Dies ist jetzt durch eine nähere Betrachtung der Ausdrücke P, Q, R, S zu bestätigen. Man hat

$$(4.)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \operatorname{sn} u}{\partial u^2} &= k^2 \operatorname{sn} u^2 - \frac{1}{\operatorname{sn} u^2} \\ \frac{\partial^2 \log \operatorname{cn} u}{\partial u^2} &= k^2 \operatorname{sn} u^2 - \frac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2} \\ \frac{\partial^2 \log \operatorname{dn} u}{\partial u^2} &= k^2 \operatorname{sn} u^2 - \frac{k^2 \operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^2}, \end{aligned}\right.$$

und daher

$$(5.)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log P}{\partial u^2} + \frac{S^2}{P^2} &= \frac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + \frac{k^2 P^2}{S^2} \\ \frac{\partial^2 \log Q}{\partial u^2} + \frac{R^2}{Q^2} &= \frac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + \frac{k^2 P^2}{S^2} \\ \frac{\partial^2 \log R}{\partial u^2} + \frac{k^2 Q^2}{R^2} &= \frac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + \frac{k^2 P^2}{S^2}. \end{aligned}\right.$$

Durch die Entwicklung der logarithmischen Differentiale erhält z. B. die erste Gleichung die Gestalt

$$\frac{P \dfrac{\partial^2 P}{\partial u^2} - \dfrac{\partial P}{\partial u}\dfrac{\partial P}{\partial u} + S^2}{P^2} = \frac{S \dfrac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \dfrac{\partial S}{\partial u}\dfrac{\partial S}{\partial u} + k^2 P^2}{S^2}.$$

Ohne die entwickelten Ausdrücke von P, S zu kennen, lässt sich doch aus der Art, wie sie aus den Grundformeln abgeleitet werden können, über ihre Form Folgendes angeben. (Vgl. Abel Précis § 4.) Es werde $\frac{u}{n} = v$ gesetzt, und es mögen die grossen deutschen Buchstaben überhaupt ganze Functionen von $\operatorname{sn} v$ bezeichnen, wo dann der Grad durch einen beigefügten Index angedeutet werden kann, so ist

I. wenn n ungrade,

$$P = \mathfrak{A}_{nn}, \qquad \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{1}{n} \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \frac{\partial \mathfrak{A}_{nn}}{\partial \operatorname{sn} v} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v\, \mathfrak{B}_{nn-1},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \frac{1}{n^2} \operatorname{cn} v^2 \operatorname{dn} v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_{nn}}{\partial \operatorname{sn} v^2} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 \operatorname{sn} v}{\partial v^2} \frac{\partial \mathfrak{A}_{nn}}{\partial \operatorname{sn} v} = \mathfrak{C}_{nn+2}, \qquad \frac{\partial P^2}{\partial u^2} = \mathfrak{D}_{2nn+2},$$

$$S = \mathfrak{A}'_{nn-1}, \qquad \frac{\partial S}{\partial u} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v\, \mathfrak{B}'_{nn-2},$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} = \frac{1}{n^2} \operatorname{cn} v^2 \operatorname{dn} v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}'_{nn-1}}{\partial \operatorname{sn} v^2} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 \operatorname{sn} v}{\partial v^2} \frac{\partial \mathfrak{A}'_{nn-1}}{\partial \operatorname{sn} v} = \mathfrak{C}'_{nn+1}, \qquad \frac{\partial S^2}{\partial u^2} = \mathfrak{D}'_{2nn},$$

II. wenn n grade,

$$P = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v\, \mathfrak{A}_{nn-3}, \qquad \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{1}{n} \operatorname{cn} v^2 \operatorname{dn} v^2 \frac{\partial \mathfrak{A}_{nn-3}}{\partial \operatorname{sn} v} + \frac{1}{n} \frac{\partial^2 \operatorname{sn} v}{\partial v^2} \mathfrak{A}_{nn-3} = \mathfrak{B}_{nn},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathfrak{B}_{nn}}{\partial u} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v\, \mathfrak{C}_{nn-1}, \qquad P^2 = \mathfrak{D}_{2nn-2}, \qquad P \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \mathfrak{E}_{2nn},$$

$$S = \mathfrak{A}'_{nn}, \qquad \frac{\partial S}{\partial u} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v\, \mathfrak{B}'_{nn-1},$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} = \frac{1}{n^2} \operatorname{cn} v^2 \operatorname{dn} v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}'_{nn}}{\partial \operatorname{sn} v^2} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 \operatorname{sn} v}{\partial v^2} \frac{\partial \mathfrak{A}'_{nn}}{\partial \operatorname{sn} v} = \mathfrak{C}'_{nn+2}, \qquad \frac{\partial S^2}{\partial u^2} = \mathfrak{D}'_{2nn+2}.$$

Ferner sind

$$P^2, \quad P \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u}, \quad S^2, \quad S \frac{\partial^2 S}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial u}$$

grade Functionen von $\operatorname{sn} v$, und der Coefficient von $\operatorname{sn} v^2$ in S ist gleich 0. Hieraus erhellt, dass die Ausdrücke

$$P \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} - \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} + S^2, \qquad S \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial u} + k^2 P^2$$

ganze, und zwar grade Functionen von $\operatorname{sn} v$ sind, deren Grad um zwei Einheiten höher als resp. der Grad von P^2 und S^2 ist. Da ferner P^2, S^2 keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so muss vermöge der obigen Gleichung der erste Ausdruck durch P^2, der zweite durch S^2 theilbar, und der Quotient für beide derselbe sein. Man kann daher setzen

$$P \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} - \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} + S^2 = (g + h \operatorname{sn} v^2) P^2, \qquad S \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial u} + k^2 P^2 = (g + h \operatorname{sn} v^2) S^2,$$

wo g, h von u unabhängig sind. Wird $u = 0$ gesetzt, so ergiebt sich aus der zweiten Gleichung $g = 0$. Ferner, wenn l den Coefficienten der höchsten in P, S vorkommenden Potenz von $\operatorname{sn} v$ bezeichnet, so erhält man mit Rücksicht auf das über die Form von P, S etc. Bemerkte für den Fall, dass n ungrade ist, aus der ersten der vorstehenden Gleichungen

$$\frac{n^2(n^2-1)}{n^2} k^2 l^2 + \frac{2k^2 n^2}{n^2} l^2 - \frac{k^2 n^4}{n^2} l^2 = h l^2, \quad \text{d. h.} \quad h = k^2;$$

und wenn n grade ist, so giebt die zweite Gleichung denselben Werth für h. Man hat daher

$$S \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial u} + k^2 P^2 = k^2 \operatorname{sn} v^2 S^2,$$

oder

$$\frac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + k^2 \frac{P^2}{S^2} = k^2 \left(\operatorname{sn} \frac{u}{n}\right)^2.$$

Hiernach erhält man aus (5.)

$$(6.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \log P}{\partial u^2} + \frac{1}{\operatorname{sn} u^2} - k^2\left(\operatorname{sn}\frac{u}{n}\right)^2 = 0\\
&\frac{\partial^2 \log Q}{\partial u^2} + \frac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2} - k^2\left(\operatorname{sn}\frac{u}{n}\right)^2 = 0\\
&\frac{\partial^2 \log R}{\partial u^2} + \frac{k^2 \operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^2} - k^2\left(\operatorname{sn}\frac{u}{n}\right)^2 = 0\\
&\frac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + k^2 \operatorname{sn} u^2 - k^2\left(\operatorname{sn}\frac{u}{n}\right)^2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Nun können $\frac{1}{\operatorname{sn} u^2}$, $\frac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2}$, $\frac{k^2 \operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^2}$, $k^2 \operatorname{sn} u^2$ in Reihen von der Form

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\operatorname{sn} u^2} &= \frac{1}{u^2} + 1 + \alpha_1 u^2 + \cdots + \alpha_r u^{2r} + \cdots\\
\frac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2} &= 1 + \beta_1 u^2 + \cdots + \beta_r u^{2r} + \cdots\\
\frac{k^2 \operatorname{sn} u^2}{\operatorname{dn} u^2} &= k^2 + \gamma_1 u^2 + \cdots + \gamma_r u^{2r} + \cdots\\
k^2 \operatorname{sn} u^2 &= k^2 u^2 + \delta_2 u^4 + \cdots + \delta_r u^{2r} + \cdots
\end{aligned}$$

entwickelt werden. Setzt man dann

$$\begin{aligned}
-\log u + \frac{u^2}{2} + \alpha_1 \frac{u^4}{3.4} + \cdots + \alpha_r \frac{u^{2r+2}}{(2r+1)(2r+2)} + \cdots &= \varphi(u)\\
\frac{u^2}{2} + \beta_1 \frac{u^4}{3.4} + \cdots + \beta_r \frac{u^{2r+2}}{(2r+1)(2r+2)} + \cdots &= \psi(u)\\
\frac{k^2 u^2}{2} + \gamma_1 \frac{u^4}{3.4} + \cdots + \gamma_r \frac{u^{2r+2}}{(2r+1)(2r+2)} + \cdots &= \chi(u)\\
\frac{k^2 u^4}{3.4} + \delta_2 \frac{u^6}{5.6} + \cdots + \delta_r \frac{u^{2r+2}}{(2r+1)(2r+2)} + \cdots &= \vartheta(u),
\end{aligned}$$

so dass

$$\frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial u^2} = \frac{1}{\operatorname{sn} u^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi(u)}{\partial u^2} = \frac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2}, \quad \frac{\partial^2 \chi(u)}{\partial u^2} = \frac{k^2 \operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^2}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta(u)}{\partial u^2} = k^2 \operatorname{sn} u^2$$

ist, und

$$\operatorname{Al}(u)_1 = e^{-\varphi(u)}, \quad \operatorname{Al}(u)_2 = e^{-\psi(u)}, \quad \operatorname{Al}(u)_3 = e^{-\chi(u)}, \quad \operatorname{Al}(u) = e^{-\vartheta(u)},$$

so können $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$, $\mathrm{Al}(u)$ in Reihen von der Form

$$(7.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u)_1 = u+A_1u^3+\cdots+A_ru^{2r+1}+\cdots \\ \mathrm{Al}(u)_2 = 1+B_1u^2+\cdots+B_ru^{2r}+\cdots \\ \mathrm{Al}(u)_3 = 1+C_1u^2+\cdots+C_ru^{2r}+\cdots \\ \mathrm{Al}(u) = 1+D_2u^4+\cdots+D_ru^{2r}+\cdots \end{cases}$$

entwickelt werden, und es ist

$$(8.)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2\log \mathrm{Al}(u)_1}{\partial u^2}+\frac{1}{\mathrm{sn}\,u^2}=0, \qquad \frac{\partial^2\log \mathrm{Al}(u)_2}{\partial u^2}+\frac{\mathrm{dn}\,u^2}{\mathrm{cn}\,u^2}=0, \\ &\frac{\partial^2\log \mathrm{Al}(u)_3}{\partial u^2}+\frac{k^2\,\mathrm{cn}\,u^2}{\mathrm{dn}\,u^2}=0, \qquad \frac{\partial^2\log \mathrm{Al}(u)}{\partial u^2}+k^2\,\mathrm{sn}\,u^2=0. \end{aligned}$$

Verbindet man diese Gleichungen mit (6.), so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\log P}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\log \mathrm{Al}(u)_1}{\partial u^2}+n^2\frac{\partial^2\log D\left(\frac{u}{n}\right)}{\partial u^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2\log Q}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\log \mathrm{Al}(u)_2}{\partial u^2}+n^2\frac{\partial^2\log D\left(\frac{u}{n}\right)}{\partial u^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2\log R}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\log \mathrm{Al}(u)_3}{\partial u^2}+n^2\frac{\partial^2\log D\left(\frac{u}{n}\right)}{\partial u^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2\log S}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\log \mathrm{Al}(u)}{\partial u^2}+n^2\frac{\partial^2\log D\left(\frac{u}{n}\right)}{\partial u^2} &= 0, \end{aligned}$$

und hieraus ergiebt sich, wenn man zugleich beachtet, dass zufolge der angegebenen Form von P, Q, R, S die Reihen-Entwicklungen dieser Ausdrücke ganz dieselbe Form haben, wie die Reihen (7.),

$$(9.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u)_1 = D^{nn}\left(\frac{u}{n}\right)\cdot P, \qquad \mathrm{Al}(u)_2 = D^{nn}\left(\frac{u}{n}\right)\cdot Q, \\ \mathrm{Al}(u)_3 = D^{nn}\left(\frac{u}{n}\right)\cdot R, \qquad \mathrm{Al}(u) = D^{nn}\left(\frac{u}{n}\right)\cdot S \end{cases}$$

und

$$(10.)\quad \mathrm{sn}\,u=\frac{P}{S}=\frac{\mathrm{Al}(u)_1}{\mathrm{Al}(u)}, \qquad \mathrm{cn}\,u=\frac{Q}{S}=\frac{\mathrm{Al}(u)_2}{\mathrm{Al}(u)}, \qquad \mathrm{dn}\,u=\frac{R}{S}=\frac{\mathrm{Al}(u)_3}{\mathrm{Al}(u)}.$$

Nimmt man nun wie vorhin an, dass die Reihen (2.) bei einem bestimmten Werth von k convergiren für alle Werthe von u, deren absoluter Betrag kleiner als a ist, so sind auch — nach bekannten elementaren Sätzen — die

Reihen für $k^2 \operatorname{sn} u^2$, $\vartheta(u)$, und — weil die Exponential-Reihe beständig convergirt — auch die Reihe, worin $D(u) = e^{-\vartheta(u)}$ entwickelt ist, sicher für dieselben Werthe von u convergent. Die Reihe für $D\left(\frac{u}{n}\right)$, und mithin auch die für $D^{nn}\left(\frac{u}{n}\right)$ convergirt also, sobald der absolute Betrag von u kleiner als na ist; für einen solchen Werth sind aber, wie schon bemerkt, auch die Reihen-Entwicklungen von P, Q, R, S, und somit vermöge der Gleichungen (9.), auch die von $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$, $\mathrm{Al}(u)$ convergent. Da aber diese letzteren von n unabhängig sind, na aber beliebig gross angenommen werden kann, so folgt, dass die Convergenz stattfinden muss für jeden noch so grossen, d. h. für jeden beliebigen Werth von u. Jede der Modular-Functionen $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ lässt sich demnach als Quotient zweier nach ganzen Potenzen von u fortschreitenden und für jeden Werth von u, wie von k convergirenden Reihen darstellen. Die Coefficienten dieser Reihen sind, wie aus der vorstehenden Entwicklung ersichtlich ist, ganze Functionen von k^2.

Die Gleichungen (8.) lassen sich nun auch so schreiben

$$(11.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{Al}(u)_1 \frac{\partial^2 \mathrm{Al}(u)_1}{\partial u^2} - \frac{\partial \mathrm{Al}(u)_1}{\partial u}\,\frac{\partial \mathrm{Al}(u)_1}{\partial u} + \mathrm{Al}(u)^2 = 0\\
&\mathrm{Al}(u)_2 \frac{\partial^2 \mathrm{Al}(u)_2}{\partial u^2} - \frac{\partial \mathrm{Al}(u)_2}{\partial u}\,\frac{\partial \mathrm{Al}(u)_2}{\partial u} + \mathrm{Al}(u)_3^2 = 0\\
&\mathrm{Al}(u)_3 \frac{\partial^2 \mathrm{Al}(u)_3}{\partial u^2} - \frac{\partial \mathrm{Al}(u)_3}{\partial u}\,\frac{\partial \mathrm{Al}(u)_3}{\partial u} + k^2\mathrm{Al}(u)_2^2 = 0\\
&\mathrm{Al}(u) \frac{\partial^2 \mathrm{Al}(u)}{\partial u^2} - \frac{\partial \mathrm{Al}(u)}{\partial u}\,\frac{\partial \mathrm{Al}(u)}{\partial u} + k^2\mathrm{Al}(u)_1^2 = 0,
\end{aligned}\right.$$

und vermittelst dieser Gleichungen liessen sich die Coefficienten der Reihen (7.) vollständig bestimmen. Man kann aber, wenn man auch den Modul als veränderlich ansieht, partielle Differential-Gleichungen herleiten, welche für die Reihen-Entwicklungen bei weitem geeigneter sind.

§ 2.

Es werde

$$\operatorname{sn} u = x, \qquad \operatorname{cn} u = y, \qquad \operatorname{dn} u = z,$$
$$\mathrm{Al}(u)_1 = p, \qquad \mathrm{Al}(u)_2 = q, \qquad \mathrm{Al}(u)_3 = r, \qquad \mathrm{Al}(u) = s$$

gesetzt. Man hat

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1-(1+k^2)x^2+\ k^2x^4$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -(1+k^2)x+2k^2x^3.$$

Differentiirt[2]) man die erste Gleichung nach k, so ergiebt sich

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial k} = [-(1+k^2)x+2k^2x^3]\frac{\partial x}{\partial k}-kx^2(1-x^2),$$

oder, wegen der zweiten,

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial k}-\dfrac{\partial x}{\partial k}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2} = -\frac{kx^2}{1-k^2x^2} = -\frac{kx^2}{z^2} = -\frac{1}{k}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{k}.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial^2 \log z}{\partial u^2} = -z^2+\frac{k'^2}{z^2} = -1+k^2x^2+\frac{k'^2}{z^2},$$

oder weil (§ 1, 8.) $k^2x^2 = -\dfrac{\partial^2 \log s}{\partial u^2}$ ist,

$$\frac{k'^2}{z^2} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial \log s}{\partial u}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial u}+u\right)}{\partial u} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial \log s}{\partial u}-\dfrac{k^2xy}{z}+u\right)}{\partial u}.$$

Multiplicirt man daher die vorangehende Gleichung mit $k(1-k^2)$, so kommt

$$k(1-k^2)\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial k}-\dfrac{\partial x}{\partial k}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2} = -\frac{\partial\left(\dfrac{\partial \log s}{\partial u}-\dfrac{k^2xy}{z}+u\right)}{\partial u}+1-k^2,$$

woraus, wenn man nach u integrirt,

$$k(1-k^2)\frac{\dfrac{\partial x}{\partial k}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}} = -k^2u-\frac{\partial \log s}{\partial u}+\frac{k^2xy}{z},$$

oder

$$(1.)\qquad k(1-k^2)\frac{\partial x}{\partial k} = -\left(k^2u+\frac{\partial \log s}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial u}+k^2x(1-x^2)$$

folgt. Differentiirt man die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2}+k^2x^2 = 0$$

nach u und k, so erhält man

$$\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3} + 2k^2 x \frac{\partial x}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^2 \partial k} + 2k^2 x \frac{\partial x}{\partial k} + 2k x^2 = 0.$$

Vermittelst dieser beiden Gleichungen kann man $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial k}$ aus (1.) eliminiren, und erhält dann

$$k(1-k^2)\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^2 \partial k} + k^2 u \frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3} + \frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3} + 2k^2 x^2 - 2k^4 x^4 = 0.$$

Diese Gleichung werde in Beziehung auf u integrirt, so findet sich, wenn man bemerkt, dass

$$\int_0 u \frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3}\partial u = u\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} - \frac{\partial \log s}{\partial u}$$

$$\int_0 \frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3}\partial u = \frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} - \int_0 \left(\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2}\right)^2 \partial u$$

$$= \frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} - k^4 \int_0 x^4 \partial u$$

$$\int_0 k^2 x^2 \partial u = -\frac{\partial \log s}{\partial u}$$

ist,

$$k(1-k^2)\frac{\partial^2 \log s}{\partial u \partial k} + k^2 u \frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} - k^2 \frac{\partial \log s}{\partial u} - 2\frac{\partial \log s}{\partial u} - \frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} - 3k^4 \int_0 x^4 \partial u = 0.$$

Aus $\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} + k^2 x^2 = 0$ folgt aber ferner

$$\frac{\partial^4 \log s}{\partial u^4} + 2k^2 \frac{\partial\left(x\frac{\partial x}{\partial u}\right)}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial^4 \log s}{\partial u^4} + 2k^2 x \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2k^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{\partial^4 \log s}{\partial u^4} + 2k^2 - 4k^2(1+k^2)x^2 + 6k^4 x^4 = 0,$$

und hieraus durch Integration

$$\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3} + 2k^2 u + 4(1+k^2)\frac{\partial \log s}{\partial u} + 6k^4 \int_0 x^4 \partial u = 0.$$

Wird diese Gleichung zu der vorhergehenden, die auch $\int_0 x^4 \partial u$ enthält, addirt, nachdem die letztere mit 2 multiplicirt worden, so ergiebt sich

$$\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3} + 2k^2 u \frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} + 2\frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} + 2k^2 \frac{\partial \log s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial^2 \log s}{\partial u\, \partial k} + 2k^2 u = 0,$$

und hieraus durch Integration in Beziehung auf u

$$\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} + 2k^2 u \frac{\partial \log s}{\partial u} + \left(\frac{\partial \log s}{\partial u}\right)^2 + 2k(1-k^2)\frac{\partial \log s}{\partial k} + k^2 u^2 = 0.$$

Substituirt man nun hier

$$\frac{\partial \log s}{\partial u} = \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} = \frac{1}{s}\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} - \frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2, \qquad \frac{\partial \log s}{\partial k} = \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial k},$$

und multiplicirt mit s, so kommt

$$(2.) \qquad \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2k^2 u \frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k} + k^2 u^2 s = 0.$$

Setzt man in (1.) $x = \frac{p}{s}$, so ergiebt sich

$$k(1-k^2)\frac{s\frac{\partial p}{\partial k} - p\frac{\partial s}{\partial k}}{s^2} + \left(k^2 u + \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial u}\right)\frac{s\frac{\partial p}{\partial u} - p\frac{\partial s}{\partial u}}{s^2} - k^2\frac{p}{s} + k^2\frac{p^3}{s^3} = 0,$$

oder, wenn man mit $2ps^3$ multiplicirt,

$$ps^2\left(2k^2 u \frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k}\right) - sp^2\left(2k^2 u\frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k}\right)$$
$$+ 2ps\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial u} - 2p^2\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 - k^2p^2s^2 + 2k^2p^4 = 0.$$

Aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1-(1+k^2)x^2 + k^2x^4$$

folgt aber

$$s^2\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 - 2ps\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial u} + p^2\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = s^4 - (1+k^2)p^2s^2 + k^2p^4,$$

und wenn man vermittelst dieser Gleichung $2ps\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial u}$ aus der vorhergehenden eliminirt,

$$ps^2\left(2k^2u\frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2)p\right) + s^2\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 - s^4$$
$$= sp^2\left(2k^2u\frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k}\right) + p^2\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 - k^2p^4.$$