

Cambridge University Press

978-1-108-05280-1 - Wissenschaftliche Abhandlungen: Volume 2

Edited by Ludwig Boltzmann and Friedrich Hasenöhl

Excerpt

[More information](#)

32.

**Über das Wärmegleichgewicht von Gasen, auf
welche äußere Kräfte wirken.¹⁾**

(Wien. Ber. 72. S. 427—457. 1875.)

In der Abhandlung: „Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen“ (Wien. Ber. 66)²⁾ habe ich gezeigt, daß für Gase mit einatomigen und mehratomigen Molekülen, auf welche keine äußeren Kräfte wirken, das für erstere von Maxwell, für letztere von mir gefundene Wahrscheinlichkeitsgesetz der verschiedenen Positionen, Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen der Atome unter den dort näher detaillierten Bedingungen das einzig Mögliche ist und daß man diesen Beweis liefern kann, indem man nachweist, daß eine gewisse Größe, welche mit der von Clausius in der Wärmetheorie als Entropie bezeichneten Größe aufs innigste zusammenhängt, durch die Molekularbewegung nur abnehmen kann. In der gegenwärtigen Abhandlung werde ich zeigen, daß diese Sätze einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig sind, indem sie sich auch auf den allgemeinen Fall ausdehnen lassen, daß auf das Gas beliebige äußere Kräfte wirken, welche jedoch ein Ergal (Kraftfunktion) besitzen, und zwar ist die Größe, welche ein Maximum wird, genau dieselbe, als ob auf das Gas keine äußeren Kräfte wirkten, nur die Bedingungen, unter denen dieselbe ihr Maximum erreicht, werden andere.

¹⁾ Voranzeige dieser Arbeit Wien. Anz. 12. S. 174, 14. Oktober 1875; übersetzt in Phil. Mag. (4) 50. S. 495. (Diese Arbeit hat eine Ergänzung und Berichtigung erfahren [§ 2]. Siehe Nr. 36 und 83 dieser Sammlung.)

²⁾ Diese Sammlung Bd. I Nr. 22.

§ 1.

Betrachtung einatomiger Gasmoleküle.

Wir stellen uns genau dasselbe Problem, welches ich im ersten Abschnitte meiner „Weiteren Studien“ behandelt habe; nur nehmen wir an, daß auf die umherfliegenden Moleküle auch äußere Kräfte wirken. Wir haben also ein Gefäß, d. h. einen allseitig von fixen Wänden umschlossenen Raum, in welchem sich sehr viele einfache materielle Punkte (Moleküle) befinden. Wenn sich zwei derselben zufällig ungewöhnlich nahe kommen (was wir wieder einen Zusammenstoß nennen wollen), sollen sie mit beliebiger Kraft aufeinanderwirken, welche eine gegebene Funktion der Distanz der beiden zusammenstoßenden Moleküle sein soll; an den Gefäßwänden sollen sie wie elastische Kugeln abprallen, genau so, wie ich dies in den „Weiteren Studien“ vorausgesetzt habe. Außerdem aber sollen noch irgendwelche Kräfte auf die Atome wirken, welche von außerhalb des Gases liegenden Ursachen herkommen und welche wir kurz „die äußeren Kräfte“ nennen wollen. Um diese äußeren Kräfte scharf definieren zu können, verzeichnen wir im Gefäße ein beliebiges fixes Koordinatensystem. Seien x, y, z die Koordinaten irgend eines Atoms zu irgend einer Zeit, so soll es eine von der Zeit unabhängige Funktion $\chi(x, y, z)$ geben, deren negative partielle Differentialquotienten nach x, y und z , wenn man sie noch mit der Masse m des betreffenden Atoms multipliziert, gleich den Komponenten der äußeren Kräfte mX, mY, mZ sind, welche zu jener Zeit auf das Atom wirken. Die Funktion χ soll das beschleunigende Ergal heißen. Wir setzen voraus, daß diese Funktion für alle Atome dieselbe ist. Im Falle, daß die Schwere die einzige äußere Kraft ist, hat man $\chi = gz$, wenn die z -Achse vertikal nach aufwärts gezogen wird. Es kann jetzt weder a priori die Annahme gemacht werden, daß alle Geschwindigkeitsrichtungen gleich wahrscheinlich sind, noch daß die Geschwindigkeitsverteilung eine gleichförmige ist. Wir fassen nun das Parallelepiped ins Auge, welches den Inbegriff aller Raumpunkte umfaßt, deren x -Koordinate zwischen x und $x + dx$, deren y -Koordinate zwischen y und $y + dy$ und deren z -Koordinate zwischen z und $z + dz$ liegt,

32. Wärmegleichgewicht bei äußeren Kräften.

3

und welches wir immer kurz das Parallelepiped $dx dy dz$ nennen wollen. Zur Zeit t sei die Anzahl der Atome, welche sich in diesem Parallelepiped befinden, und deren Geschwindigkeit in der Richtung der x -Achse eine Komponente hat, die zwischen u und $u + du$ liegt, in der Richtung der y -Achse eine Komponente, die zwischen v und $v + dv$ liegt, und in der Richtung der z -Achse eine Komponente, die zwischen w und $w + dw$ liegt.

$$(1) \quad N = f(x, y, z, u, v, w, t) dx dy dz du dv dw.$$

Indem wir uns die Geschwindigkeiten sämtlicher Moleküle in Größe und Richtung von einem bestimmten Punkte des Raumes (z. B. dem Koordinatenursprunge) aus aufgetragen denken und uns des abgekürzten Ausdruckes bedienen, eine Geschwindigkeit liege in einem Raume, wenn der andere Endpunkt der so aufgetragenen Geschwindigkeit darin liegt, wollen wir sagen, die Geschwindigkeiten aller dieser Atome liegen im Parallelepiped $du dv dw$. Die Funktion f charakterisiert die Verteilung der verschiedenen Zustände unter den Molekülen oder mit anderen Worten die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Zustände derselben vollständig. Wenn ihr Wert für den Anfang der Zeit, den wir mit $t = 0$ charakterisieren wollen, wenn also $f(x, y, z, u, v, w, 0)$ und außerdem die Gestalt des Gefäßes und sämtliche Kräfte gegeben sind, so ist das Problem ein vollständig bestimmtes und es ist vollkommen gelöst, wenn man imstande ist, den Wert der Funktion f für alle anderen t anzugeben. Die partielle Differentialgleichung, aus welcher der Wert der Funktion f für die übrigen t zu bestimmen ist, wenn er für $t = 0$ gegeben ist, habe ich bereits in den „Weiteren Studien“ ohne Beweis angegeben. Es ist die daselbst als Gleichung (44) bezeichnete. Da diese Gleichung die Grundlage für unsere späteren Untersuchungen bildet, und ich dieselbe dort nicht weiter begründet habe, so will ich sie hier in Kürze ableiten. Betrachten wir wieder das Parallelepiped $dx dy dz$, in welchem zur Zeit t

$$N = f(x, y, z, u, v, w, t) dx dy dz du dv dw$$

Moleküle seien, deren Geschwindigkeitskomponenten zwischen u und $u + du$, v und $v + dv$, w und $w + dw$ liegen. Zur Zeit $t + \delta t$ sollen sich in demselben Parallelepiped

1*

$$N + \delta N = \left[f(x, y, z, u, v, w, t) + \delta t \frac{df(x, y, z, u, v, w, t)}{dt} \right] do d\omega$$

Moleküle befinden, deren Geschwindigkeitskomponenten zwischen denselben Grenzen liegen, wobei Kürze halber do für $dx dy dz$ und $d\omega$ für $du dv dw$ geschrieben wurde. Dann ist

$$\delta N = \frac{df(x, y, z, u, v, w, t)}{dt} do d\omega \delta t$$

der gesamte Zuwachs, welchen die Anzahl dieser Moleküle, also unsere Zahl N während der Zeit δt erfahren hat. Dieser Zuwachs hat eine dreifache Ursache:

1. Durch die Seitenwände des Parallelepipedes treten während der Zeit δt Moleküle ein und aus, und zwar treten während der Zeit δt durch jene beiden Seitenwände, welche senkrecht auf der x -Achse stehen,

$$u \delta t f(x, y, z, u, v, w, t) dy dz d\omega$$

und

$$- u \delta t f(x + dx, y, z, u, v, w, t) dy dz d\omega$$

Moleküle ein, deren Geschwindigkeitskomponenten zwischen den oben angegebenen Grenzen liegen. Die Summe dieser beiden Zahlen ist

$$- u \frac{df(x, y, z, u, v, w, t)}{dx} \delta t do d\omega.$$

Stellt man dieselben Betrachtungen auch für die vier anderen Seitenwände an, so findet man für den gesamten Zuwachs, den die Zahl N infolge des Ein- und Austretens der Moleküle erleidet, den Wert:

$$- \left(u \frac{df}{dx} + v \frac{df}{dy} + w \frac{df}{dz} \right) \delta t do d\omega,$$

wobei kurz f statt $f(x, y, z, u, v, w, t)$ geschrieben wurde.

2. Infolge der Wirksamkeit der äußeren Kräfte haben die Atome, welche zur Zeit t die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w hatten, zur Zeit $t + \delta t$ die Geschwindigkeitskomponenten $u + X\delta t, v + Y\delta t, w + Z\delta t$.

Indem wir uns gerade wie früher sämtliche Geschwindigkeiten in Größe und Richtung vom Koordinatenursprunge aus aufgetragen denken, können wir folgendes sagen: Wenn der Endpunkt der Geschwindigkeit eines Moleküls zur Zeit t die Koordinaten u, v, w hatte, so hat er zur Zeit $t + \delta t$ die

Cambridge University Press

978-1-108-05280-1 - Wissenschaftliche Abhandlungen: Volume 2

Edited by Ludwig Boltzmann and Friedrich Hasenöhl

Excerpt

[More information](#)

32. Wärmegleichgewicht bei äußeren Kräften.

5

Koordinaten $u + X \delta t$, $v + Y \delta t$, $w + Z \delta t$. In das Parallelepiped $du dv dw$ werden also infolge der Wirksamkeit der in der Richtung der x -Achse wirkenden Kraft X die Geschwindigkeiten von

$$\begin{aligned} f(x, y, z, u, v, w, t) d o d \omega - f(x, y, z, u + X \delta t, v, w) d o d \omega \\ = - X \frac{d f(x, y, z, u, v, w, t)}{d u} d o d \omega \delta t \end{aligned}$$

Moleküle eintreten; und da wieder analoges von der y - und z -Achse gilt, so hat der gesamte Zuwachs von N infolge der zweiten Ursache den Wert

$$- \left(X \frac{d f}{d u} + Y \frac{d f}{d v} + Z \frac{d f}{d w} \right) d o d \omega \delta t.$$

3. Die Anzahl N verändert sich auch durch die Zusammenstöße der Moleküle, und da wollen wir uns sogleich auf den Fall beschränken, daß der Raum so wenig dicht mit Molekülen erfüllt ist, daß die gleichzeitigen Zusammenstöße dreier und mehrerer Moleküle ohne Einfluß auf das Resultat sind.

Um die Veränderung von N infolge der dritten Ursache zu finden, will ich ganz dieselben Betrachtungen anstellen, welche Maxwell (Phil. Mag. (4) 35) anstellte, und auch die dortigen Bezeichnungen Maxwells beibehalten. Nachdem sich zwei Moleküle so nahe gekommen sind, daß sie miteinander in Wechselwirkung treten, werden sie sich in Bahnen aneinander vorbeibewegen, die jedenfalls eine gewisse Ähnlichkeit mit Hyperbelen haben, um einander dann wieder zu verlassen.

Die kleinste Entfernung der beiden Geraden, in denen sich die Moleküle bewegten, bevor ihre Wechselwirkung begann, wollen wir mit b , den Winkel, welchen die Bahnebene mit einer durch die Richtung der relativen Geschwindigkeit parallel der x -Achse gelegten Ebene macht, mit φ bezeichnen. Seien u, v, w und u_1, v_1, w_1 die Geschwindigkeitskomponenten der beiden Moleküle vor dem Zusammenstoße. Wenn außer diesen sechs Größen auch noch die Werte von b und φ gegeben sind, so ist damit die Natur des Zusammenstoßes vollkommen bestimmt. Seien $u', v', w', u_1', v_1', w_1'$ die Werte derselben Größen nach dem Zusammenstoße, so wird jede der Größen $u' v' w' u_1' v_1' w_1'$ eine Funktion der acht Variablen $u v w u_1 v_1 w_1 b \varphi$ sein, welche berechnet werden kann, sobald das Wirkungsgesetz der während

des Zusammenstoßes tätigen Kräfte gegeben ist. Die Werte der Größen b werden durch den Zusammenstoß nicht verändert. Es ist klar, daß, wenn umgekehrt ein Zusammenstoß so geschehen würde, daß vor demselben die den Zusammenstoß charakterisierenden Variablen die Werte $u', v', w', u_1', v_1', w_1', b, \varphi'$ hätten, dieselben dann nach dem Zusammenstoße die Werte $u, v, w, u_1, v_1, w_1, b, \varphi$ haben würden. Man findet nun leicht (vgl. die zitierte Abhandlung Maxwells), daß die Anzahl der Zusammenstöße, welche im Volumelemente $d\sigma = dx dy dz$ während der Zeit δt so geschehen, daß dabei die Geschwindigkeit des einen der stoßenden Moleküle im Volumelemente $d\omega = du dv dw$, die des andern im Volumelemente $d\omega_1 = du_1 dv_1 dw_1$ und die beiden Größen b und φ zwischen den Grenzen b und $b + db$, φ und $\varphi + d\varphi$ liegen, den Wert

$$f f_1 d\sigma d\omega d\omega_1 b db V d\varphi \delta t$$

hat. Dabei ist

$$V = \sqrt{(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2 + (w - w_1)^2}$$

die relative Geschwindigkeit beider Moleküle; f_1 ist Kürze halber für $f(x, y, z, u_1, v_1, w_1, t)$ geschrieben. Integriert man diesen Ausdruck über alle möglichen Werte der Variablen $u_1, v_1, w_1, b, \varphi$ also bezüglich φ von Null bis 2π , bezüglich b von Null bis ∞ , bezüglich u_1, v_1, w_1 von $-\infty$ bis $+\infty$, so findet man die Anzahl aller Zusammenstöße, welche im Volumelemente $d\sigma$ während der Zeit δt so geschehen, daß die Geschwindigkeit des einen der stoßenden Moleküle im Volumelemente $d\omega$ liegt, während alle anderen Variablen beliebige Werte haben. Durch jeden dieser Zusammenstöße wird die von uns mit N bezeichnete Anzahl um eine Einheit vermindert; dieselbe vermindert sich also im ganzen um

$$f d\sigma d\omega \delta t \int \int \int f_1 V b d\omega_1 db d\varphi.$$

Wir wissen, daß jede der Größen $u', v', w', u_1', v_1', w_1', \varphi'$ eine Funktion von $u, v, w, u_1, v_1, w_1, b, \varphi$ ist. In dem Differentialausdruck $du' dv' dw' du_1' dv_1' dw_1' db d\varphi'$ können wir also nach den Regeln, welche für die Transformation der Variablen in bestimmten Integralen gelten, die Variablen $u, v, w, u_1, v_1, w_1, b, \varphi$ einführen, wodurch man erhält:

32. Wärmegleichgewicht bei äußeren Kräften.

$$du' dv' dw' du_1' dv_1' dw_1' db d\varphi' = \Delta dudvdwdu_1 dv_1 dw_1 db d\varphi,$$

wobei

$$\Delta = \sum \pm \frac{du'}{du} \frac{dv'}{dv} \frac{dw'}{dw} \frac{du_1'}{du_1} \frac{dv_1'}{dv_1} \frac{dw_1'}{dw_1} \frac{d\varphi'}{d\varphi}$$

ist. Wir setzen wieder $d\omega' = du' dv' dw'$; $d\omega_1' = du_1' dv_1' dw_1'$.

Wenn vor dem Zusammenstoße die Geschwindigkeiten der beiden stoßenden Moleküle in den Volumelementen $d\omega$ und $d\omega_1$ die Größen b und φ aber zwischen den Grenzen b und $b + db$, φ und $\varphi + d\varphi$ lagen, so ist klar, daß nach dem Stoße die Geschwindigkeiten der Moleküle in den Volumelementen $d\omega'$, $d\omega_1'$, die Größen b und φ aber zwischen b und $b + db$, φ' und $\varphi' + d\varphi'$ liegen werden. Dies gilt aber auch umgekehrt. Liegen vor dem Stoße die Geschwindigkeiten in den Volumelementen $d\omega'$, $d\omega_1'$ die Größen b, φ zwischen b und $b + db$, φ' und $\varphi' + d\varphi'$, so werden nach demselben die Geschwindigkeiten in den Volumelementen $d\omega, d\omega_1$ die Größen b, φ zwischen b und $b + db$, φ und $\varphi + d\varphi$ liegen. Die Anzahl der Zusammenstöße, welche in $d\omega$ während δt so geschehen, daß dieser letztere umgekehrte Fall eintritt, ist

$$f' f_1' V b d\omega d\omega_1' db d\varphi' = \Delta f' f_1' V b d\omega d\omega_1 db d\varphi,$$

worin

$$f' = f(x, y, z, u', v', w', t), \quad f_1' = f(x, y, z, u_1', v_1', w_1', t).$$

Integrieren wir wieder bezüglich φ von Null bis 2π , bezüglich b von Null bis ∞ , bezüglich $u_1 v_1 w_1$ von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhalten wir alle Zusammenstöße, welche in $d\omega$ während δt so geschehen, daß nach demselben die Geschwindigkeit eines der stoßenden Moleküle im Volumelemente $d\omega$ liegt, während alle übrigen Größen beliebig sind. Durch jeden dieser Zusammenstöße wird die Zahl N um eine Einheit vermehrt, sie wird also im ganzen um

$$d\omega d\omega \delta t \int \int \int f' f_1' V b \Delta d\omega_1 db d\varphi$$

vermehrt, in welchem Ausdrucke $u', v', w', u_1', v_1', w_1'$ als Funktionen von $u, v, w, u_1, v_1, w_1, b, \varphi$ auszudrücken sind. Der Gesamtzuwachs von N in Folge der dritten Ursache ist also

$$d\omega d\omega \delta t \int \int \int (f' f_1' V b \Delta - f f_1 V b) d\omega_1 db d\varphi.$$

Cambridge University Press

978-1-108-05280-1 - Wissenschaftliche Abhandlungen: Volume 2

Edited by Ludwig Boltzmann and Friedrich Hasenöhl

Excerpt

[More information](#)

Nun ist aber leicht zu beweisen und für einatomige Moleküle schon von Maxwell in der zitierten Abhandlung bewiesen worden, daß

$$\Delta = 1$$

und man kann daher den Zuwachs der Größe N infolge der dritten Ursache auch so schreiben

$$d o d \omega \delta t f f f (f' f_1' - f f_1) \mathcal{V} b d \omega_1 d b d \varphi.$$

Anmerkung. Eine etwas ausführlichere Darstellung ganz analoger Schlüsse findet man im ersten Abschnitte meiner „Weiteren Studien“.

Da nun der gesamte Zuwachs der Größe N infolge aller drei Ursachen gleich

$$\frac{df}{dt} d o d \omega \delta t$$

sein muß, so erhält man, indem man durch $d o d \omega \delta t$ dividiert, die Gleichung

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \frac{df}{dt} + u \frac{df}{dx} + v \frac{df}{dy} + w \frac{df}{dz} + X \frac{df}{du} + Y \frac{df}{dv} + Z \frac{df}{dw} \\ = f f f (f' f_1' - f f_1) \mathcal{V} b d \omega_1 d b d \varphi, \end{aligned} \right.$$

welche identisch mit der Gleichung (44) meiner „Weiteren Studien“ ist.

Es handelt sich nun zunächst darum, aus dieser Gleichung, welche die Veränderung der Funktion f bestimmt, den Beweis zu liefern, daß der Ausdruck

$$(3) \quad E = \frac{2}{3} f f f (l f) d o d \omega$$

in dem jetzt von uns betrachteten Falle, daß auch äußere Kräfte auf das Gas einwirken, mit wachsender Zeit nicht zunehmen kann. l bedeutet den natürlichen Logarithmus. Die Integration ist bezüglich u, v und w von $-\infty$ bis $+\infty$, bezüglich x, y und z über das ganze als unveränderlich vorausgesetzte Gefäß zu erstrecken, in welchem sich das Gas befindet.¹

Der Faktor $\frac{2}{3}$ wurde beigefügt, um die Größe E in bessere

¹ Ich bemerke hier, daß nicht wie ich in den „Weiteren Studien“ sagte, die daselbst mit E^* , sondern die mit E bezeichnete Größe die Eigenschaft besitzt, daß ihr Wert für die Vereinigung zweier Körper gleich der Summe ihrer Werte für jene beiden Körper ist.

32. Wärmegleichgewicht bei äußeren Kräften.

9

Übereinstimmung mit der Entropie zu bringen. Genau wie in den „Weiteren Studien“ finden wir

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \iint l f \frac{df}{dt} d\omega d\omega.$$

Setzen wir hier für df/dt seinen Wert aus Gleichung (2), so erhalten wir für dE/dt einen Ausdruck, welcher aus sieben Gliedern besteht. Wir werden da zunächst von den sechs ersten Gliedern den Nachweis liefern, daß sie verschwinden. Es bleibt dann nur das siebente Glied, welches ganz analog wie der Ausdruck für dE/dt in den „Weiteren Studien“ behandelt werden kann. Die drei ersten Glieder des Ausdruckes, der sich für dE/dt ergibt, sind:

$$(4) \quad - \iint l f \left(u \frac{df}{dx} + v \frac{df}{dy} + w \frac{df}{dz} \right) d\omega d\omega.$$

Da $d\omega = dx dy dz$ ist, so wollen wir den ersten Summanden nach x , den zweiten nach y , den dritten nach z integrieren. Das ursprünglich über das ganze Innere des Gefäßes zu erstreckende Integrale reduziert sich dadurch auf ein über die Oberfläche des Gefäßes zu nehmendes:

$$(5) \quad - \iint f l (f l - 1) n ds d\omega,$$

wobei ds ein Element der Oberfläche, n diejenige Komponente der Geschwindigkeit $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ ist, welche in die Richtung der Außennormale zur Gefäßoberfläche fällt. Wir können für jedes Oberflächenelement ds statt u, v, w drei neue Variablen einführen, nämlich die Komponenten der Geschwindigkeit in der Richtung der Gefäßnormale und in zwei darauf senkrechten Richtungen, welche wir mit n, p, q bezeichnen wollen. Das Integrale (5) geht dadurch über in

$$(6) \quad - \iiint f l f (f l - 1) n ds dn dp dq,$$

wobei bezüglich n, p und q von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integrieren ist. Da wir nun annehmen, daß die Moleküle an den festen Wänden wie elastische Kugeln reflektiert werden, so müssen genau dieselben Moleküle, welche mit gewissen Werten von p und q gegen die Wand anfliegen, wieder mit denselben Werten von p und q von der Wand zurückkehren. Die anfliegenden

Moleküle unterscheiden sich aber von den zurückkehrenden nur durch das Zeichen von n ; es bleibt also die Funktion f unverändert, wenn p und q unverändert bleiben und nur n sein Zeichen ändert, woraus folgt, daß sich in dem Integrale (6) je zwei Glieder tilgen, daß also das Integrale selbst den Wert Null besitzt. Man sieht übrigens leicht ein, daß dieselben Konsequenzen auch gezogen werden könnten, wenn die Moleküle nicht wie elastische Kugeln an den Wänden reflektiert werden, nur ist es dann ziemlich schwierig, die Art und Weise der Wirksamkeit der Wände exakt mathematisch zu formulieren.

Wir haben bei diesem Beweise nach x , y und z integriert. Die Erlaubtheit dieser Manipulation kann zweifelhaft werden, wenn die Funktion f diskontinuierlich ist, was freilich nur im ersten Momente stattfinden kann, weil dann sogleich eine Vermischung eintritt. Um uns auch in diesem Falle von dem Verschwinden des Ausdruckes (5) zu überzeugen, wollen wir eine Methode einschlagen, die ich schon in den „Weiteren Studien“ angedeutet habe. Wir nehmen für einen Augenblick an, daß unter den Gasmolekülen keine Zusammenstöße stattfinden, und daß auch keine äußeren Kräfte auf das Gas einwirken. Es bleibt dann nur die durch die Formel (4) gegebene Veränderung von E , während die übrigen verschwinden. Bezeichnen wir den Ausdruck $\frac{2}{3} flf$ Kürze halber, insofern er Funktion von t ist, mit $\varphi(t)$, so ist offenbar

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\tau} \int d\omega [f d\varphi(t + \tau) - f d\varphi(t)].$$

Nun kann man sich aber leicht überzeugen, daß die beiden Integrale $\int d\varphi(t + \tau)$ und $\int d\varphi(t)$ vollkommen miteinander identisch sind (sich auch nicht um Unendlichkleines von der Ordnung τ unterscheiden). Es ist nämlich $d\varphi$ ein Parallelepiped, welches bestimmt ist, wenn man weiß, daß vier Ecken desselben die Koordinaten

$$\begin{array}{l|l} x, y, z & x, y + dy, z \\ x + dx, y, z & x, y, z + dz \end{array}$$

haben. Genau dieselben Moleküle, welche zur Zeit t in diesem Parallelepiped lagen, befinden sich zur Zeit $t + \tau$ in dem gleich großen Parallelepiped, von dem vier Ecken die Koordinaten