I.

LES FONCTIONS TRANSCENDANTES $\Sigma\frac{1}{a^2}$, $\Sigma\frac{1}{a^3}$, $\Sigma\frac{1}{a^4}$, ... $\Sigma\frac{1}{a^n}$ EXPRIMÉES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

Si l'on différentie plusieurs fois de suite la fonction $\Sigma\frac{1}{a}$, on aura

$$\frac{d\Sigma\frac{1}{a}}{da}=\frac{\Sigma d\frac{1}{a}}{da}=-\Sigma\frac{1}{a^2},$$

$$\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{da^2}=\frac{\Sigma d^2\left(\frac{1}{a}\right)}{da^2}=+2\Sigma\frac{1}{a^3},$$

$$\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{da^3}=\frac{\Sigma d^3\left(\frac{1}{a}\right)}{da^3}=-2.3\Sigma\frac{1}{a^4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^n\Sigma\frac{1}{a}}{da^n}=\frac{\Sigma d^n\left(\frac{1}{a}\right)}{da^n}=\pm 2.3.4\ldots n.\Sigma\frac{1}{a^{n+1}},$$

où le signe $+$ a lieu, lorsque n est pair, et le signe $-$, lorsque n est impair.

On en conclut réciproquement

$$\Sigma\frac{1}{a^2}=-\frac{d\Sigma\frac{1}{a}}{da},\quad \Sigma\frac{1}{a^3}=+\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{2.da^2},\quad \Sigma\frac{1}{a^4}=-\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{2.3.da^3}+\text{etc.},$$

$$\Sigma\frac{1}{a^n}=\pm\frac{d^{n-1}\Sigma\frac{1}{a}}{1.2.3\ldots(n-1)da^{n-1}}=\pm\frac{d^{n-1}L(a)}{2.3\ldots(n-1)da^{n-1}}.$$

Or on a $\Sigma\frac{1}{a}=L(a)=\int_0^1\frac{x^{a-1}-1}{x-1}dx$. On en tire, en différentiant par rapport à a,

$$\frac{d\Sigma\frac{1}{a}}{da}=\int_0^1\frac{x^{a-1}(lx)}{x-1}dx,$$

$$\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{da^2}=\int_0^1\frac{x^{a-1}(lx)^2}{x-1}dx,$$

$$\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{da^3}=\int_0^1\frac{x^{a-1}(lx)^3}{x-1}dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-1}\Sigma\frac{1}{a}}{da^{n-1}}=\int_0^1\frac{x^{a-1}(lx)^{n-1}}{x-1}dx.$$

En substituant ces valeurs, on aura

$$\Sigma\frac{1}{a^2}=-\int_0^1\frac{x^{a-1}lx}{x-1}dx,$$

$$\Sigma\frac{1}{a^3}=\tfrac{1}{2}\int_0^1\frac{x^{a-1}(lx)^2}{x-1}dx,$$

$$\Sigma\frac{1}{a^4}=-\frac{1}{2\cdot 3}\int_0^1\frac{x^{a-1}(lx)^3}{x-1}dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma\frac{1}{a^{2n}}=-\frac{1}{2.3.4\ldots(2n-1)}\int_0^1\frac{x^{a-1}(lx)^{2n-1}}{x-1}dx,$$

$$\Sigma\frac{1}{a^{2n+1}}=+\frac{1}{2.3\ 4\ldots 2n}\int_0^1\frac{x^{a-1}(lx)^{2n}}{x-1}dx.$$

En général, quel que soit α, on aura

$$\Sigma\frac{1}{a^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{x^{a-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}dx.$$

Désignons $\Sigma\frac{1}{a^\alpha}$ par $L(a,\alpha)$, nous aurons

$$(1)\qquad L(a,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{x^{a-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}dx+C.$$

En développant $\frac{x^{a-1}}{x-1}$ en série infinie, il viendra

$$L(a,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 x^{a-2}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx+\int_0^1 x^{a-3}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx\right.$$
$$\left.+\int_0^1 x^{a-4}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx+\cdots\right];$$

or $\int_0^1 x^{a-k-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\frac{\Gamma(\alpha)}{(a-k)^\alpha}$, par conséquent

$$L(a,\alpha)=\frac{1}{(a-1)^\alpha}+\frac{1}{(a-2)^\alpha}+\frac{1}{(a-3)^\alpha}+\cdots+C,$$

où C est une constante indépendante de a. Pour la trouver, faisons dans (1) $a=1$, ce qui donne $L(1,\alpha)=0$ et $x^{a-1}=x^0=1$; par conséquent

$$C=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}dx.$$

On tire de là

$$L(a,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{x^{a-1}-1}{x-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx,$$

où a peut être positif, négatif où zéro. On a

$$x^{a-1}=\left(\frac{1}{x}\right)^{-a+1}=1-(a-1)\left(l\frac{1}{x}\right)+\frac{(a-1)^2}{2}\cdot\left(l\frac{1}{x}\right)^2-\frac{(a-1)^3}{2.3}\left(l\frac{1}{x}\right)^3+\text{etc.}$$

Substituant cette valeur, on aura

$$L(a,\alpha)=$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{(a-1)\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^\alpha}{1-x}dx-\frac{(a-1)^2}{2}\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1}}{1-x}dx+\frac{(a-1)^3}{2.3}\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha+2}}{1-x}dx-\cdots\right\}.$$

Considérons l'expression $\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^k}{1-x}dx$. En développant $\frac{1}{1-x}$, on aura

$$\int\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^k}{1-x}dx=\int\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx+\int x\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx+\int x^2\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx+\cdots;$$

or $\int_0^1 x^n\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx=\frac{\Gamma(k+1)}{(n+1)^{k+1}}$, donc

$$\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^k}{1-x}dx = \Gamma(k+1)\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k+1}}+\frac{1}{4^{k+1}}+\cdots\right),$$

donc enfin

$$\begin{aligned} L(a,\alpha) = & \frac{(a-1).\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+1}}+\frac{1}{3^{\alpha+1}}+\frac{1}{4^{\alpha+1}}+\cdots\right) \\ & -\frac{(a-1)^2.\Gamma(\alpha+2)}{2.\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\frac{1}{3^{\alpha+2}}+\frac{1}{4^{\alpha+2}}+\cdots\right) \\ & +\frac{(a-1)^3.\Gamma(\alpha+3)}{2.3.\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+3}}+\frac{1}{3^{\alpha+3}}+\frac{1}{4^{\alpha+3}}+\cdots\right) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

or on a $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\alpha+2)=\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)$ et en général $\Gamma(\alpha+k) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k-1)\Gamma(\alpha)$. Substituant ces valeurs, on obtient

$$\begin{aligned} L(a,\alpha) = & \frac{a-1}{1}\alpha\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+1}}+\frac{1}{3^{\alpha+1}}+\frac{1}{4^{\alpha+1}}+\cdots\right) \\ & -\frac{(a-1)^2}{1.2}\alpha(\alpha+1)\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\frac{1}{3^{\alpha+2}}+\frac{1}{4^{\alpha+2}}+\cdots\right) \\ & +\frac{(a-1)^3}{1.2.3}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+3}}+\frac{1}{3^{\alpha+3}}+\frac{1}{4^{\alpha+3}}+\cdots\right) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Si l'on pose a infini, on aura

$$L(\infty,\alpha) = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\cdots,$$

donc en désignant $L(\infty,\alpha)$ par $L'(\alpha)$

$$L(a,\alpha) = \alpha.(a-1)L'(\alpha+1)-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}(a-1)^2L'(\alpha+2)+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{2.3}(a-1)^3L'(\alpha+3)-\cdots.$$

Si dans la formule (1) on met $\frac{m}{a}$ au lieu de a, on aura

$$L\left(\frac{m}{a},\ \alpha\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{\left(x^{\frac{m}{a}-1}-1\right)\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}dx.$$

Faisant $x^{\frac{1}{a}}=y$, x devient $=y^a$, $dx=ay^{a-1}$, $\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}=a^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}$ et par suite

$$L\left(\frac{m}{a},\alpha\right) = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(y^{m-a}-1)\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}y^{a-1}}{y^a-1}dy = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{y^{m-1}-y^{a-1}}{y^a-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy.$$

On tire de là

$$L\left(\frac{m}{a}, \alpha\right) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{y-1}dy + \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{y^{m-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{y^a-1}dy.$$

Si maintenant $m-1<a$, ce qu'on peut supposer, la fraction $\frac{y^{m-1}}{y^a-1}$ est résoluble en fractions partielles de la forme $\frac{A}{1-cy}\cdot$ On aura donc

$$L\left(\frac{m}{a}, \alpha\right) = \left\{A\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}dy + A'\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-c'y}dy + \cdots\right\}\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot$$

Si l'on développe $\frac{1}{1-cy}$ en série, on voit que

$$\int \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}dy = \int\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy + c\int y\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy + c^2\int y^2\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy + \cdots$$

or $\int_0^1\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}y^k\,dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{(k+1)^\alpha}$, donc

$$\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}dy = \Gamma(\alpha)\left(1+\frac{c}{2^\alpha}+\frac{c^2}{3^\alpha}+\frac{c^3}{4^\alpha}+\cdots\right);$$

donc en désignant $1+\frac{c}{2^\alpha}+\frac{c^2}{3^\alpha}+\frac{c^3}{4^\alpha}+\cdots$ par $L'(\alpha, c)$, on aura

$$\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}.\,dy = \Gamma(\alpha).\,L'(\alpha, c);$$

on obtiendra donc enfin:

$$L\left(\frac{m}{a}, \alpha\right) = a^\alpha[A.\,L'(\alpha, c) + A'.\,L'(\alpha, c') + A''.\,L'(\alpha, c'') + \text{etc.}].$$

La fonction $L\left(\frac{m}{a}, \alpha\right)$ peut donc, lorsque m et a sont des nombres entiers, être exprimée sous forme finie à l'aide des fonctions $\Gamma(\alpha)$ et $L'(\alpha, c)$. Soit par exemple $m=1$, $a=2$, on aura

$$L(\tfrac{1}{2}, \alpha) = \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{1-y}{y^2-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy = -\frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1+y}dy.$$

On a par conséquent $A=-1$ et $c=-1$, donc

$$L(\tfrac{1}{2}, \alpha) = -2^\alpha.\,L'(\alpha, -1) = -2^\alpha\left(1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\cdots\right).$$

Lorsque α est un nombre entier, on sait que la somme de cette série peut s'exprimer par le nombre π ou par le logarithme de 2. Soit $\alpha = 1$, on a $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$, donc $L(\frac{1}{2}, 1) = L(\frac{1}{2}) = -2 \log 2$.

En posant $\alpha = 2$, on a $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$, donc

$$L(\tfrac{1}{2}, 2) = -\frac{\pi^2}{3}.$$

On peut en général exprimer $L(\frac{1}{2}, 2n)$ par $-M\pi^{2n}$, où M est un nombre rationnel.

II.

SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx$.

Dans les Exercices de calcul intégral de M. *Legendre* on trouve l'expression suivante

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx = \frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)} \tag{1}$$

donc

$$\log\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx = \log\Gamma a + \log\Gamma c - \log\Gamma(a+c).$$

En différentiant par rapport à a et à c, et remarquant que

$$\frac{dl\Gamma(a)}{da} = La - C$$

on aura

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}lx.dx}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx} = La - L(a+c),$$

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l(1-x).dx}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx} = Lc - L(a+c).$$

Ces deux équations combinées avec l'équation (1), donnent

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}lx.dx = [La - L(a+c)]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l(1-x)dx = [Lc - L(a+c)]\frac{\Gamma a \,.\, \Gamma c}{\Gamma(a+c)}.$$

La dernière équation peut aussi se déduire de l'avant-dernière en échangeant a et c entre eux, et mettant $1-x$ à la place de x.

Lorsque $c=1$, on a, à cause de $L(1+a)=\frac{1}{a}+L(a)$, et $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$,

$$\int_0^1 x^{a-1}\,lx\,.\,dx = -\frac{1}{a^2},$$

résultat connu, et

$$\int_0^1 x^{a-1}\,l(1-x)\,dx = -\frac{L(1+a)}{a},$$

donc

$$L(1+a) = -a\int_0^1 x^{a-1}l(1-x)\,dx.$$

En développant $(1-x)^{c-1}$ en série, on trouvera

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_0^1 x^{a-1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx - (c-1)\int_0^1 x^a l\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$+\frac{(c-1)(c-2)}{2}\int_0^1 x^{a+1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx - \cdots;$$

or $\int_0^1 x^k l\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{(k+1)^2}$, donc

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{a^2}-(c-1)\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{(c-1)(c-2)}{2}\cdot\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{2\,.\,3}\cdot\frac{1}{(a+3)^2}+\cdots;$$

mais $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx = [L(a+c)-La]\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}$, donc

(2) $\quad [L(a+c)-La]\dfrac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}$

$$=\frac{1}{a^2}-(c-1)\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{(c-1)(c-2)}{2}\cdot\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{2\,.\,3}\cdot\frac{1}{(a+3)^2}+\cdots.$$

Soit par exemple $c=1-a$, on a

$$L(a+c)-La = -La, \quad \Gamma(a+c)=1,$$

$$\Gamma a\,.\,\Gamma c = \Gamma a\,.\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi};$$

donc

$$-La\cdot\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a^2}+\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{a(a+1)}{2(a+2)^2}+\frac{a(a+1)(a+2)}{2.3.(a+3)^2}+\cdots.$$

Soit $a=\frac{1}{2}$, on a $-La=2\log 2$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, donc

$$2\pi\log 2=2^2+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{2.5^2}+\frac{3.5}{2^2.3.7^2}+\frac{3.5.7}{2^3.3.4.9^2}+\cdots.$$

Soit $a=1-x$, $c=2x-1$, on aura en remarquant que $L(1-x)-Lx=\pi\cot\pi x$,

$$-\pi.\cot\pi x\cdot\frac{\Gamma(1-x).\Gamma(2x-1)}{\Gamma x}$$
$$=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{2x-2}{(2-x)^2}+\frac{(2x-2)(2x-3)}{2(3-x)^2}-\frac{(2x-2)(2x-3)(2x-4)}{2.3.(4-x)^2}+\cdots.$$

En échangeant a et c entre eux dans l'équation (2), on obtient

$$[L(a+c)-Lc]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}=\frac{1}{c^2}-(a-1)\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{(a-1)(a-2)}{2(c+2)^2}-\cdots.$$

En divisant l'équation (2) par celle-ci membre à membre, on aura

$$\frac{L(a+c)-L(a)}{L(a+c)-L(c)}=\frac{\frac{1}{a}-\frac{c-1}{(a+1)^2}+\frac{(c-1)(c-2)}{2(a+2)^2}-\cdots}{\frac{1}{c^2}-\frac{a-1}{(c+1)^2}+\frac{(a-1)(a-2)}{2(c+2)^2}-\cdots}$$

De cette équation on tirera, en y faisant $c=1$,

$$L(1+a)=a-\frac{a(a-1)}{2^2}+\frac{a(a-1)(a-2)}{2.3^2}-\cdots,$$

donc en écrivant $-a$ pour a,

$$L(1-a)=-\left(a+\frac{a(a+1)}{2^2}+\frac{a(a+1)(a+2)}{2.3^2}+\cdots\right),$$

et en mettant $a-1$ au lieu de a,

$$La=(a-1)-\frac{(a-1)(a-2)}{2^2}+\frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{2.3^2}-\cdots$$

on tire de là

$$L(1-a)-La=\pi.\cot\pi a$$
$$=-\left(2a-1+\frac{a(a+1)-(a-1)(a-2)}{2^2}+\frac{a(a+1)(a+2)+(a-1)(a-2)(a-3)}{2.3^2}+\cdots\right).$$

Si dans l'équation (2) on pose $a=1$, on aura

$$[L(c+1)-L(1)]\frac{\Gamma(1)\ \Gamma c}{\Gamma(c+1)}=\frac{L(1+c)}{c}=1-\frac{(c-1)}{2^2}+\frac{(c-1)(c-2)}{2.3^2}-\cdots$$

Cambridge University Press
978-1-108-05058-6 - Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel: Nouvelle édition: Volume 2
Edited by L. Sylow and S. Lie
Excerpt
More information

comme auparavant. En faisant $c=0$, il vient

$$\frac{L(1)}{0}=\frac{0}{0}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Nous avons vu que

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\,l\left(\frac{1}{x}\right)dx=[L(a+c)-La]\,\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}.$$

En différentiant cette équation logarithmiquement, il viendra

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^2 dx}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\,l\left(\frac{1}{x}\right)dx}=-\frac{\frac{dL(a+c)}{da}-\frac{dL(a)}{da}}{L(a+c)-La}+L(a+c)-L(a).$$

Or on a $\frac{dLa}{da}=-\Sigma\frac{1}{a^2}$; soit $\Sigma\frac{1}{a^2}=L'(a)$, on aura

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^2.dx$$
$$=[(L'(a+c)-L'a)+(L(a+c)-La)^2]\,\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}.$$

Si l'on désigne $\Sigma\frac{1}{a^3}$ par $L''a$, $L\frac{1}{a^4}$ par $L'''a$ etc., on obtiendra par des différentiations répétées

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^3 dx=[2(L''(a+c)-L''a)+$$
$$3(L'(a+c)-L'a)\,(L(a+c)-La)+(L(a+c)-La)^3]\,\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}.$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^4 dx=\text{etc.}$$

En différentiant l'équation (2) par rapport à a, on aura

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^2 dx$$
$$=2\left(\frac{1}{a^3}-\frac{c-1}{1}\cdot\frac{1}{(a+1)^3}+\frac{(c-1)(c-2)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{(a+2)^3}-\frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{1}{(a+3)^3}+\cdots\right),$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^3 dx$$
$$=2\,.\,3\left(\frac{1}{a^4}-\frac{c-1}{1}\cdot\frac{1}{(a+1)^4}+\frac{(c-1)(c-2)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{(a+2)^4}-\frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{1}{(a+3)^4}+\cdots\right),$$

et en général