CAMBRIDGE LIBRARY COLLECTION

Books of enduring scholarly value

Mathematics

From its pre-historic roots in simple counting to the algorithms powering modern desktop computers, from the genius of Archimedes to the genius of Einstein, advances in mathematical understanding and numerical techniques have been directly responsible for creating the modern world as we know it. This series will provide a library of the most influential publications and writers on mathematics in its broadest sense. As such, it will show not only the deep roots from which modern science and technology have grown, but also the astonishing breadth of application of mathematical techniques in the humanities and social sciences, and in everyday life.

Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik

The Prussian schoolmaster Hermann Grassmann (1809–77) taught a range of subjects including mathematics, science and Latin and wrote several secondary-school textbooks. Although he was never appointed to a university post, he devoted much energy to mathematical research and developed revolutionary new insights. *Die Lineale Ausdehnungslehre*, published in 1844, is an astonishing work which was not understood by the mathematicians of its time but which anticipated developments that took a century to come to fruition – vector spaces, dimension, exterior products and many other ideas. Admired rather than read by the next generation, it was only fully appreciated by mathematicians such as Peano and Whitehead.

Cambridge University Press has long been a pioneer in the reissuing of out-of-print titles from its own backlist, producing digital reprints of books that are still sought after by scholars and students but could not be reprinted economically using traditional technology. The Cambridge Library Collection extends this activity to a wider range of books which are still of importance to researchers and professionals, either for the source material they contain, or as landmarks in the history of their academic discipline.

Drawing from the world-renowned collections in the Cambridge University Library and other partner libraries, and guided by the advice of experts in each subject area, Cambridge University Press is using state-of-the-art scanning machines in its own Printing House to capture the content of each book selected for inclusion. The files are processed to give a consistently clear, crisp image, and the books finished to the high quality standard for which the Press is recognised around the world. The latest print-on-demand technology ensures that the books will remain available indefinitely, and that orders for single or multiple copies can quickly be supplied.

The Cambridge Library Collection brings back to life books of enduring scholarly value (including out-of-copyright works originally issued by other publishers) across a wide range of disciplines in the humanities and social sciences and in science and technology.

Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik

HERMANN GRASSMANN

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town,
Singapore, São Paolo, Delhi, Mexico City

Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York

www.cambridge.org
Information on this title: www.cambridge.org/9781108050432

This edition first published 1844
This digitally printed version 2013

ISBN 978-1-108-05043-2 Paperback

Die

lineale Ausdehnungslehre

ein

neuer Zweig der Mathematik

dargestellt

und

durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik,

wie auch

auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert

von

Hermann Grassmann
Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin.

Mit 1 Tafel.

Leipzig, 1844.
Verlag von Otto Wigand.

Vorrede.

Wenn ich das Werk, dessen ersten Theil ich hiermit dem Publikum übergebe, als Bearbeitung einer neuen mathematischen Disciplin bezeichne, so kann die Rechtfertigung einer solchen Behauptung nur durch das Werk selbst gegeben werden. Indem ich mich daher jeder anderweitigen Rechtfertigung entschlage, gehe ich sogleich dazu über, den Weg zu bezeichnen, auf welchem ich Schritt für Schritt zu den hier niedergelegten Resultaten gelangt bin, um damit zugleich den Umfang dieser neuen Disciplin, so weit es hier thunlich ist, zur Anschauung zu bringen. Den ersten Anstoss gab mir die Betrachtung des Negativen in der Geometrie; ich gewöhnte mich, die Strecken AB und BA als entgegengesetzte Grössen aufzufassen; woraus denn hervorging, dass, wenn A, B, C Punkte einer geraden Linie sind, dann auch allemal $AB + BC = AC$ sei, sowohl wenn AB und BC gleichbezeichnet sind, als auch wenn entgegengesetzt bezeichnet, d. h. wenn C zwischen A und B liegt. In dem letzteren Falle waren nun AB und BC nicht als blosse Längen aufgefasst, sondern an ihnen zugleich ihre Richtung festgehalten, vermöge deren sie eben einander entgegengesetzt waren. So drängte sich der Unterschied auf zwischen der Summe der Längen und zwischen der Summe solcher Strecken, in denen zugleich die Richtung mit festgehalten war. Hieraus ergab sich die Forderung, den letzten Begriff der Summe nicht bloss für den Fall, dass die Strecken gleich- oder entgegengesetzt-gerichtet waren, sondern auch für jeden andern Fall festzustellen. Dies konnte auf's einfachste geschehen, indem das Gesetz, dass $AB + BC = AC$ sei, auch dann noch festgehalten wurde, wenn A, B, C nicht in einer geraden Linie lagen. — Hiermit war denn der erste Schritt zu einer Analyse gethan, welche in der Folge zu dem neuen Zweige der Mathematik führte, der hier vorliegt. Aber keinesweges ahnte ich, auf welch' ein fruchtbares und reiches Gebiet ich hier gelangt war; vielmehr schien mir jenes Ergebniss wenig beachtungswerth, bis sich dasselbe mit einer verwandten Idee kombinirte. Indem ich nämlich den Begriff des Produktes in der Geometrie verfolgte, wie er von meinem Vater *) aufgefasst wurde, so ergab sich mir, dass nicht nur das Rechteck, sondern auch das Parallelogram überhaupt als Produkt zweier an einander stossender Seiten desselben zu betrachten sei, wenn man nämlich wiederum nicht das Produkt der Längen, sondern der beiden Strecken mit Festhaltung ihrer Richtungen auffasste. Indem ich nun diesen Begriff des Produktes mit dem vorheraufgestellten der Summe in Kombination brachte, so ergab sich die auffallendste Harmonie; wenn ich nämlich statt die in dem vorher angegebenen Sinne genommene Summe zweier Strecken mit einer dritten in derselben Ebene liegenden Strecke in dem eben aufgestellten Sinne zu multipliciren, die Stücke einzeln mit derselben Strecke multiplicirte, und die Produkte mit gehöriger Beobachtung ihrer positiven oder negativen Geltung addirte, so zeigte sich, dass in beiden Fällen jedesmal dasselbe Resultat hervorging und hervorgehen musste. Diese Harmonie liess mich nun allerdings ahnen, dass sich hiermit ein ganz neues Gebiet der Analyse aufschliessen würde, was zu wichtigen Resultaten führen könnte. Doch blieb diese Idee, da

*) Vergleiche: J. G. Grassmanns Raumlehre Theil II. pag. 194. und dessen Trigonometrie p. 10.

mich mein Beruf in andere Kreise der Beschäftigung hineinzog, wieder eine ganze Zeit lang ruhen; auch machte mich das merkwürdige Resultat anfangs betroffen, dass für diese neue Art des Produktes zwar die übrigen Gesetze der gewöhnlichen Multiplikation und namentlich ihre Beziehung zur Addition bestehen blieb, dass man aber die Faktoren nur vertauschen konnte, wenn man zugleich die Vorzeichen umkehrte (+ in — verwandelte und umgekehrt). Eine Arbeit über die Theorie der Ebbe und Fluth, welche ich späterhin vornahm, führte mich zu der Mécanique analytique des La Grange und dadurch wieder auf jene Ideen der Analyse zurück. Alle Entwickelungen in jenem Werke gestalteten sich nun durch die Principien dieser neuen Analyse auf eine so einfache Weise um, dass oft die Rechnung mehr als zehnmal kürzer ausfiel, als sie in jenem Werke geführt war. Dies ermuthigte mich, auch auf die schwierige Theorie der Ebbe und Fluth die neue Analyse anzuwenden; es waren dazu mannigfache neue Begriffe zu entwickeln, und in die Analyse zn kleiden; namentlich führte mich der Begriff der Schwenkung zur geometrischen Exponentialgrösse, zu der Analyse der Winkel und der trigonometrischen Funktionen u. s. w.*) Und ich hatte die Freude zu sehen, wie durch die so gestaltete und erweiterte Analyse nicht nur die oft sehr verwickelten und unsymmetrischen Formeln, welche dieser Theorie zu Grunde liegen**), sich in höchst einfache und symmetrische Formeln umsetzten, sondern auch die Art ihrer Entwickelung stets dem Begriffe zur Seite ging. In der That konnte nicht nur jede Formel, welche im Gange der Entwickelung sich ergab, aufs leichteste in Worte gekleidet werden, und drückte dann jedesmal ein besonderes Gesetz aus; sondern auch jeder Fortschritt von einer Formel zur andern erschien unmittelbar nur als der symbolische Ausdruck einer parallel gehenden

*) Die nähere Nachweisung s. unten.
**) Vergl. La Place Méc. céleste. liv. IV.

begrifflichen Beweisführung. Bei der sonst üblichen Methode zeigte sich durch die Einführung willkührlicher Koordinaten, die mit der Sache nichts zu schaffen haben, die Idee gänzlich verdunkelt, und die Rechnung bestand in einer mechanischen, dem Geiste nichts darbietenden und darum Geist tödtenden Formelentwickelung. Hingegen hier, wo die Idee, durch nichts fremdartiges getrübt, überall durch die Formeln in voller Klarheit hindurchstrahlte, war auch bei jeder Formelentwickelung der Geist in der Fortentwickelung der Idee begriffen. — Durch diesen Erfolg nun hielt ich mich zu der Hoffnung berechtigt, in dieser neuen Analyse die einzig naturgemässe Methode gefunden zu haben, nach welcher jede Anwendung der Mathematik auf die Natur fortschreiten müsse, und nach welcher gleichfalls die Geometrie zu behandeln sei, wenn sie zu allgemeinen und fruchtreichen Ergebnissen führen solle *). Es reifte daher in mir der Entschluss, aus der Darstellung, Erweiterung und Anwendung dieser Analyse eine Aufgabe meines Lebens zu machen. Indem ich nun meine freie Zeit diesem Gegenstande ungetheilt zuwandte, so füllten sich allmälig die Lücken aus, welche die frühere gelegentliche Bearbeitung gelassen hatte. Namentlich ergab sich auf die Weise und mit den Modifikationen, wie ich in dem Werke selbst dargestellt habe, dass als Summe mehrerer Punkte ihr Schwerpunkt, als Produkt zweier Punkte ihre Verbindungsstrecke, als das dreier der zwischen ihnen liegende Flächenraum und als das Produkt von vier Punkten der zwischen ihnen liegende Körperraum (die Pyramide) aufgefasst werden konnte. Die Auffassung des Schwerpunktes als Summe veranlasste mich, den barycentrischen Kalkül von Möbius zu vergleichen, ein Werk, das ich bis dahin nur dem Titel nach kannte;

*) In der That zeigte sich bald, wie durch diese Analyse die Differenz zwischen der analytischen und synthetischen Behandlung der Geometrie gänzlich verschwand.

Cambridge University Press
978-1-108-05043-2 - Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik
Hermann Grassmann
Frontmatter
More information

und zu meiner nicht geringen Freude fand ich hier denselben Begriff der Summation der Punkte vor, zu dem mich der Gang der Entwickelung geführt hatte, und war somit zu dem ersten, aber wie die Folge lehrte, auch zu dem einzigen Berührungspunkte gelangt, welchen die neue Analyse mit dem schon anderweitig bekannten darbot. Da indessen der Begriff eines Produktes von Punkten in jenem Werke gar nicht vorkommt, mit diesem Begriffe aber, indem er mit dem der Summe in Kombination tritt, erst die Entfaltung der neuen Analyse beginnt, so konnte ich auch von dorther keine weitere Förderung meiner Aufgabe erwarten. Indem ich daher nun daran ging, die so gefundenen Resultate zusammenhängend und von Anfang an zu bearbeiten, so dass ich mich auch auf keinen in irgend einem Zweige der Mathematik bewiesenen Satz zu berufen gedachte, so ergab sich, dass die von mir aufgefundene Analyse nicht, wie mir Anfangs schien, bloss auf dem Gebiete der Geometrie sich bewegte; sondern ich gewahrte bald, dass ich hier auf das Gebiet einer neuen Wissenschaft gelangt sei, von der die Geometrie selbst nur eine specielle Anwendung sei. Schon lange war es mir nämlich einleuchtend geworden, dass die Geometrie keinesweges in dem Sinne wie die Arithmetik oder die Kombinationslehre als ein Zweig der Mathematik anzusehen sei, vielmehr die Geometrie schon auf ein in der Natur gegebenes (nämlich den Raum) sich beziehe, und dass es daher einen Zweig der Mathematik geben müsse, der in rein abstrakter Weise ähnliche Gesetze aus sich erzeuge, wie sie in der Geometrie an den Raum gebunden erscheinen. Durch die neue Analyse war die Möglichkeit, einen solchen rein abstrakten Zweig der Mathematik auszubilden, gegeben; ja diese Analyse, sobald sie, ohne irgend einen schon anderweitig erwiesenen Satz vorauszusetzen, entwickelt wurde, und sich rein in der Abstraktion bewegte, war diese Wissenschaft selbst. Der wesentliche Vortheil, welcher durch diese Auffassung erreicht wurde, war der Form nach der, dass nun alle Grundsätze, welche Raumesanschauungen ausdrückten, gänzlich wegfielen, und somit der Anfange in eben so unmittelbarer wurde, wie der der Arithmetik, dem Inhalte nach aber der, dass die Beschränkung auf drei Dimensionen wegfiel. Erst hierdurch traten die Gesetze in ihrer Unmittelbarkeit und Allgemeinheit ans Licht und stellten sich in ihrem wesentlichen Zusammenhange dar, und manche Gesetzmässigkeit, die bei drei Dimensionen entweder noch gar nicht, oder nur verdeckt vorhanden war, entfaltete sich nun bei dieser Verallgemeinerung in ihrer ganzen Klarheit. — Uebrigens ergab sich im Verlauf, dass mit den gehörigen Bestimmungen, wie sie im Werke selbst zu finden sind, der Durchschnittspunkt zweier Linien, die Durchschnittslinie zweier Ebenen und der Durchschnittspunkt dreier Ebenen als Produkte jener Linien oder dieser Ebenen aufgefasst werden konnten *), woraus sich dann zugleich eine höchst einfache und allgemeine Kurventheorie ergab **). Darauf ging ich nun zur Erweiterung und Begründung dessen über, was ich für den zweiten Theil dieses Werkes bestimmt habe, wohin ich nämlich alles dasjenige verwiesen habe, was irgend wie den Begriff der Schwenkung oder des Winkels voraussetzt. Da dieser zweite Theil, welcher das Werk schliessen wird, erst später im Druck erscheinen soll, so scheint es mir für die Uebersicht des Ganzen nöthig, die hierher gehörigen Ergebnisse etwas genauer zu bezeichnen. Zu diesem Ende habe ich zuerst die Resultate anzugeben, welche sich schon vor der zusammenhängenden Bearbeitung ergeben hatten. Ich habe eben gezeigt, wie als Produkt zweier Strecken das Parellelogramm aufgefasst werden kann, wenn nämlich, wie hier überall geschieht, die Richtung der Srecken mit festgehalten wird; wie aber dies Produkt dadurch ausgezeichnet ist, dass die Faktoren nur mit Zeichenwechsel vertauscht werden können, während zugleich das zweier gleichgerichteter Strecken offenbar

---

*) Vergl. Kap. 3 des zweiten Abschnitts.
**) Vergl. dasselbe Kapitel.

null ist. Diesem Begriffe stellte sich ein anderer zur Seite, der sich gleichfalls auf Strecken mit festgehaltener Richtung bezieht. Nämlich wenn ich die eine Strecke senkrecht auf die andere projicirte, so stellte sich das arithmetische Produkt dieser Projektion in die Strecke, worauf projicirt war, gleichfalls als Produkt jener Strecken dar, sofern auch hierfür die multiplikative Beziehung zur Addition galt. Aber das Produkt war von ganz anderer Art, wie jenes erstere, insofern die Faktoren desselben ohne Zeichenwechsel vertauschbar waren, und das Produkt zweier gegen einander senkrechter Strecken als null erschien. Ich nannte jenes erstere Produkt das äussere, dies letztere das innere Produkt, sofern jenes nur bei auseinander tretenden Richtungen, dieses nur bei Annäherung derselben d. h. bei theilweisem Ineinandersein einen geltenden Werth hatte. Dieser Begriff des inneren Produktes, welcher sich mir schon bei der Durcharbeitung der Mécanique analytique als nothwendig herausgestellt hatte, führte zugleich zu dem Begriffe der absoluten Länge*). — Eben so hatte sich mir schon bei der Bearbeitung der Theorie der Ebbe und Fluth die geometrische Exponentialgrösse ergeben; nämlich wenn a eine Strecke (mit festgehaltener Richtung) und a einen Winkel (mit festgehaltener Schwenkungsebene) darstellt, so ergab sich aus rein inneren Gründen, deren Angabe mich jedoch zu weit führen würde, dass $a \cdot e^{\alpha}$, wo e als die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems aufgefasst werden kann, die Strecke bedeutet, welche aus a durch eine Schwenkung hervorgeht, die den Winkel α erzeugt; d. h. es bedeutet $a \cdot e^{\alpha}$ die Strecke a geschwenkt um den Winkel α. Wenn ferner $\mathrm{Cos}\,\alpha$, wo α einen Winkel ausdrückt im geometrischen Sinne, dieselbe Zahl vorstellt wie $\cos\bar{\alpha}$, wo $\bar{\alpha}$ den zu dem Winkel gehörigen, durch den Halbmesser gemessenen Bogen bedeuten soll: so folgt aus jenem

*) Auch dieser Begriff, da er die Schwenkung voraussetzt, gehört dem zweiten Theile an.

Begriffe der Exponentialgrösse sogleich, dass

$$\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

sei *). Eben so wenn $\mathrm{Sin}\,\alpha$ die Grösse vorstellt, welche die Strecke, mit der sie multiplicirt ist, nach der Schwenkungsseite des Winkels α um 90^0 in ihrer Richtung ändert, und zugleich ihre absolute Länge auf gleiche Weise ändert wie $\sin\bar{\alpha}$, so ist

$$\mathrm{Sin}\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2},$$

und es ergiebt sich daraus die Gleichung

$$\mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{Sin}\alpha = e^{\alpha},$$

alles Gleichungen, welche die auffallendste Analogie mit den bekannten imaginären Ausdrücken verrathen.

Soweit hatten sich diese Begriffe schon früher ergeben. Als ich nun auch diese Begriffe zu verallgemeinern trachtete, so erweiterte sich zuerst der Begriff des inneren Produktes auf entsprechende Weise, wie ich dies für das äussere Produkt in Bezug auf das Durchschneiden der Linien und Ebenen oben angedeutet habe; sodann kam ich zunächst auf den Begriff des Quotienten verschieden gerichteter Strecken, und verstand unter $\frac{a}{b}$ wo a und b verschieden gerichtete Strecken von gleicher Länge vorstellen, die Grösse, welche jede in derselben Ebene liegende Strecke um den Winkel ba (von b nach a gerechnet) ändert, so dass in der That, wie es sein muss, $\frac{a}{b}b = a$ ist; und hieraus ergab sich dann der Begriff für den Fall, dass a und b von ungleicher Länge sind, unmittelbar. Jener einfache Begriff wurde nun aber die Quelle für eine Reihe der interessantesten Beziehungen. Zuerst ergab sich

*) In der That wenn AB (Figur 1) die ursprüngliche Strecke ist, und dieselbe um den Winkel α in die Lage AC, um den Winkel $-\alpha$ aber in die Lage AD geschwenkt wird, und man das Parallelogramm ACDE vollendet, so ist AE die Summe der Strecken AC + AD, und die Hälfte AF dieser Summe der Cosinus des Winkels α.

hieraus sogleich eine neue Art der Multiplikation, welche dieser Division entsprach, und sich von allen früheren dadurch unterschied, dass das Produkt dieser neuen Art nur 0 werden konnte, wenn einer der Faktoren 0 wurde, während die Faktoren vertauschbar blieben, kurz eine Multiplikation, welche in allen ihren Gesetzen der gewöhnlichen arithmetischen analog blieb; und der Begriff derselben ging leicht hervor, wenn ich eine Strecke fortschreitend mit verschiedenen solchen Quotienten multiplicirte, und dann den einen Quotienten auffasste, welcher statt dieser fortschreitenden Faktoren gesetzt werden konnte. Da nun nach der Definition, wenn ab den Winkel beider Strecken, welche von gleicher Länge sind, bedeutet

$$e^{ab} = \frac{b}{a} \text{ ist, so hat man auch}$$

$$\log \frac{b}{a} = ab$$

Ferner, wenn der Winkel ab der mte Theil von ac ist, so hat man

$$\left(\frac{c}{a}\right)^m = \frac{c}{a},$$

weil nämlich, wenn eine Strecke m mal fortschreitend die Schwenkung $\frac{b}{a}$ erleidet, sie dann im Ganzen die Schwenkung $\frac{c}{a}$ vollendet. Also auch, wenn der Winkel ab halb so gross ist als ac, so ist

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c}{a} \text{ also } \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

Ist namentlich $\frac{b}{a}$ der Schwenkung um einen Rechten, also $\frac{c}{a}$ der um 2 Rechte gleich, so ist, da c = -a, also $\frac{c}{a} = -1$ ist, $\frac{b}{a} = \sqrt{-1}$, d. h. der Ausdruck $\sqrt{-1}$ mit einer Strecke multiplcirt ändert ihre Richtung um 90^0 nach irgend einer, dann aber allemal nach derselben Seite hin. Diese schöne Bedeutung der imaginären Grösse vervollständigte sich noch dadurch, dass sich ergab, dass

$$e^\alpha \text{ und } e^{(\alpha)\sqrt{-1}}$$

denselben Werth bezeichnen, wenn α den Winkel, (α) aber den dazu gehörigen Bogen dividirt durch den Halbmesser bedeutet; in der That fand sich dann

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

wie gehörig, und eben so

$$\sqrt{-1}\,\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

Formeln, welche also eine rein geometrische Bedeutung haben, indem $e^{x\sqrt{-1}}$ die Schwenkung um einen Winkel, bedeutet dessen Bogen durch den Halbmesser gemessen x gibt. Hiernach nun gewannen alle imaginären Ausdrücke eine rein geometrische Bedeutung, und lassen sich durch geometrische Konstruktionen darstellen. Zugleich war der Winkel als Logarithmus des Quotienten $\frac{b}{a}$ bestimmt, daher auch die unendliche Menge seiner Werthe bei derselben Schenkellage. Eben so nun zeigte sich auch umgekehrt, wie man vermittelst der so gefundenen Bedeutung des Imaginären auch die Gesetze der Analyse innerhalb der Ebene ableiten kann, hingegen ist es nicht mehr möglich, vermittelst des Imaginären auch die Gesetze für den Raum abzuleiten. Auch stellen sich überhaupt der Betrachtung der Winkel im Raume Schwierigkeiten entgegen, zu deren allseitiger Lösung mir noch nicht hinreichende Musse geworden ist.

Dies etwa sind die Gegenstände, welche ich mir für den zweiten und letzten Theil vorbehalten habe, wenigstens so weit sie bis jetzt von mir bearbeitet sind, mit ihm wird das Werk geschlossen sein. Die Zeit, wann dieser zweite Theil erscheinen wird, kann ich noch nicht bestimmen, indem es mir bei den mannigfachen Arbeiten, in welche mich mein jetziges Amt verwickelt, unmöglich wird, diejenige Ruhe zu finden, welche für die Bearbeitung desselben nothwendig ist. Doch bildet auch dieser erste Theil ein für sich bestehendes, in sich abgeschlossenes Ganze, und ich hielt es für zweckmässiger, diesen ersten Theil mit den zugehörigen Anwendungen zusammen erscheinen zu lassen, als beide Theile zusammen und von den Anwendungen gesondert.

In der That ist es bei der Darstellung einer neuen Wissenschaft, damit ihre Stellung und ihre Bedeutung recht erkannt werde, unumgänglich nothwendig, sogleich ihre Anwendung und ihre Beziehung zu verwandten Gegenständen zu zeigen. Hierzu soll auch zugleich die Einleitung dienen. Diese ist der Natur der Sache nach mehr philosophischer Natur, und, wenn ich diesselbe aus dem Zusammenhange des ganzen Werkes heraussonderte, so geschah dies, um die Mathematiker nicht sogleich durch die philosophische Form zurückzuschrecken. Es herrscht nämlich noch immer unter den Mathematikern und zum Theil nicht mit Unrecht eine gewisse Scheu vor philosophischen Erörterungen mathematischer und physikalischer Gegenstände; und in der That leiden die meisten Untersuchungen dieser Art, wie sie namentlich von Hegel und seiner Schule geführt sind, an einer Unklarheit und Willkühr, welche alle Frucht solcher Untersuchungen vernichtet. Dessen ungeachtet glaubte ich es der Sache schuldig zu sein, der neuen Wissenschaft ihre Stelle im Gebiete des Wissens anweisen zu müssen, und stellte daher, um beiden Forderungen zu genügen, eine Einleitung voran, welche ohne dem Verständniss des Ganzen wesentlich zu schaden, überschlagen werden kann. Auch bemerke ich, dass unter den Anwendungen gleichfalls die, welche sich auf Gegenstände der Natur (Physik, Krystallonomie) beziehen, überschlagen werden können, ohne dass dadurch der Gang der ganzen Entwickelung gestört wird. Durch diese Anwendungen auf die Physik glaubte ich besonders die Wichtigkeit, ja die Unentbehrlichkeit der neuen Wissenschaft und der in ihr gebotenen Analyse dargethan zu haben. Dass dieselbe in ihrer konkreten Gestalt, d. h. in ihrer Uebertragung auf die Geometrie, einen vortrefflichen Unterrichtsgegenstand liefern würde, welcher einer durchaus elementaren Behandlung fähig ist, hoffe ich gelegentlich einmal nachweisen zu können, indem zu einer solchen Nachweisung in dem Werke selbst, seiner Bestimmung gemäss, kein Platz gefunden werden konnte. Namentlich ist es bei einer elementaren Behandlung der Statik, wenn in derselben anschauliche und allgemeine (auch durch Konstruktion darstellbare) Resultate hervorgehen sollen, unumgänglich nothwendig, den Begriff der Summe und des Produktes von Strecken aufzunehmen, und die Hauptgesetze dafür zu entwickeln, und ich bin gewiss, dass, wer das Aufnehmen dieser Begriffe einmal versucht hat, es nie wieder aufgeben wird.

Wenn ich so der neuen Wissenschaft, deren Bearbeitung hier wenigstens theilweise vorliegt, ganz ihr Recht zuerkannt habe, und ihr die Ansprüche, die sie im Gebiete des Wissens machen kann, auf keine Weise verkürzen will, so glaube ich dadurch mir nicht den Vorwurf der Anmassung zuzuziehen; denn die Wahrheit verlangt ihr Recht; sie ist nicht das Werk dessen, der sie zum Bewusstsein oder zur Anerkennung bringt; sie hat ihr Wesen und Dasein in sich selbst; und ihr aus falscher Bescheidenheit ihr Recht verkürzen ist ein Verrath an der Wahrheit. Aber desto mehr Nachsicht muss ich in Anspruch nehmen für alles das, was mein Werk an der Wissenschaft ist. Denn ich bin mir, ungeachtet aller auf die Form verwandten Mühe, dennoch der grossen Unvollkommenheit derselben bewusst. Zwar habe ich das Ganze mehrere male durchgearbeitet in verschiedenen Formen, bald in Euklidischer Form von Erklärungen und Lehrsätzen in möglichster Strenge, bald in Form einer zusammenhängenden Entwickelung mit möglichster Uebersichtlichkeit, bald beides mit einander verflechtend, indem ich die Uebersicht-gebende Darstellung vorangehen, und dann die Entwickelung nach Euklidischer Form folgen liess. Zwar bin ich mir dessen wohl bewusst, dass bei abermaliger Umarbeitung manches in besserer, d. h. theils strengerer, theils übersichtlicherer Form hervortreten würde. Aber von der Ueberzeugung durchdrungen, dass ich doch keine volle Befriedigung hoffen könne, und der Einfachheit, der Wahrheit gegenüber, die Darstellung doch immer nur dürftig bleiben müsse, entschloss ich mich, mit der Form hervorzutreten, welche mir zur Zeit als die beste erschien. Einen besonderen Grund der

Nachsicht hoffe ich auch darin zu finden, dass mir die Zeit für die Bearbeitung vermöge meiner amtlichen Thätigkeit nur äusserst kärglich und stückenweise zugemessen war, auch mir mein Amt keine Gelegenheit darbot, durch Mittheilungen aus dem Gebiete dieser Wissenschaft, oder auch nur verwandter Gegenstände, die lebendige Frische zu gewinnen, welche wie ein lebendiger Hauch das Ganze durchwehen muss, wenn es als ein lebendiges Glied an dem Organismus des Wissens erscheinen soll. Doch wenn auch eine Berufsthätigkeit, in welcher solche Mittheilungen aus dem Gebiete der Wissenschaft meine eigentliche Aufgabe sein würden, als das Ziel meiner Wünsche und Bestrebungen mir vor Augen steht, so glaubte ich doch die Bearbeitung dieser Wissenschaft nicht bis zur Erreichung dieses Zieles aufschieben zu dürfen, zumal da ich hoffen konnte, durch die Bearbeitung dieses Theiles selbst mir den Weg zu jenem Ziele bahnen zu können.

Stettin den 28. Juni 1844.

Einleitung.

A. Ableitung des Begriffs der reinen Mathematik.

1. Die oberste Theilung aller Wissenschaften ist die in reale und formale, von denen die ersteren das Sein, als das dem Denken selbstständig gegenübertretende, im Denken abbilden, und ihre Wahrheit haben in der Uebereinstimmung des Denkens mit jenem Sein; die letzteren hingegen das durch das Denken selbst gesetzte zum Gegenstande haben, und ihre Wahrheit haben in der Uebereinstimmung der Denkprocesse unter sich.

Denken ist nur in Bezug auf ein Sein, was ihm gegenübertritt und durch das Denken abgebildet wird; aber dies Sein ist bei den realen Wissenschaften ein selbstständiges, ausserhalb des Denkens für sich bestehendes, bei den formalen hingegen ein durch das Denken selbst gesetztes, was nun wieder einem zweiten Denkakte als Sein sich gegenüberstellt. Wenn nun die Wahrheit überhaupt in der Uebereinstimmung des Denkens mit dem Sein beruht, so beruht sie insbesondere bei den formalen Wissenschaften in der Uebereinstimmung des zweiten Denkaktes mit dem durch den ersten gesetzten Sein, also in der Uebereinstimmung beider Denkakte. Der Beweis in den formalen Wissenschaften geht daher nicht über das Denken selbst hinaus in eine andere Sphäre über, sondern verharrt rein in der Kombination der verschiedenen Denkakte. Daher dürfen auch die formalen Wissenschaften nicht von Grundsätzen aus gehen, wie die realen; sondern ihre Grundlage bilden die Definitionen*).

*) Wenn man in die formalen Wissenschaften, wie z. B. in die Arithmetik, dennoch Grundsätze eingeführt hat, so ist dies als ein Missbrauch anzusehen, der nur aus der entsprechenden Behandlung der Geometrie zu erklären ist. Ich

2. Die formalen Wissenschaften betrachten entweder die allgemeinen Gesetze des Denkens, oder sie betrachten das Besondere durch das Denken gesetzte, ersteres die Dialektik (Logik), letzteres die reine Mathematik.

Der Gegensatz zwischen Allgemeinem und Besonderem bedingt also die Theilung der formalen Wissenschaften in Dialektik und Mathematik. Die erstere ist eine philosophische Wissenschaft, indem sie die Einheit in allem Denken aufsucht, die Mathematik hingegen hat die entgegengesetzte Richtung, indem sie jedes Gedachte einzeln als ein Besonderes auffasst.

3. Die reine Mathematik ist daher die Wissenschaft des besonderen Seins als eines durch das Denken gewordenen. Das besondere Sein, in diesem Sinne aufgefasst, nennen wir eine Denkform oder schlechtweg eine Form. Daher ist reine Mathematik Formenlehre.

Der Name Grössenlehre eignet nicht der gesammten Mathematik, indem derselbe auf einen wesentlichen Zweig derselben, auf die Kombinationslehre, keine Anwendung findet, und auf die Arithmetik auch nur im uneigentlichen Sinne *). Dagegen scheint der Ausdruck Form wieder zu weit zu sein, und der Name Denkform angemessener; allein die Form in ihrer reinen Bedeutung, abstrahirt von allem realen Inhalte, ist eben nichts anderes, als die Denkform, und somit der Ausdruck entsprechend. Ehe wir zur Theilung der Formenlehre übergehen, haben wir einen Zweig auszusondern, den man bisher mit Unrecht ihr zugerechnet hat, nämlich die Geometrie. Schon aus dem oben aufgestellten Begriffe leuchtet ein, dass die Geometrie, eben so wie die Mechanik, auf ein reales Sein zurückgeht; nämlich dies ist für die Geometrie der Raum; und es ist klar, wie der Begriff des Raumes keinesweges durch das Denken erzeugt werden kann, sondern demselben

---

werde hierauf später noch einmal ausführlicher zurückkommen. Hier genüge es, das Fehlen der Grundsätze in den formalen Wissenschaften als nothwendig dargethan zu haben.

*) Der Begriff der Grösse wird in der Arithmetik durch den der Anzahl vertreten; die Sprache unterscheidet daher sehr wohl vermehren und vermindern, was der Zahl angehört, von vergrössern und verkleinern, was der Grösse.

stets als ein gegebenes gegenübertritt. Wer das Gegentheil behaupten wollte, müsste sich der Aufgabe unterziehen, die Nothwendigkeit der drei Dimensionen des Raumes aus den reinen Denkgesetzen abzuleiten, eine Aufgabe, deren Lösung sich sogleich als unmöglich darstellt. — Wollte nun jemand, obgleich er dies zugeben müsste, dennoch der Geometrie zu Liebe den Namen der Mathematik auch auf sie ausdehnen; so könnten wir uns dies zwar gefallen lassen, wenn er uns auch auf der andern Seite unsern Namen der Formenlehre oder irgend einen gleichgeltenden will stehen lassen; doch aber müssten wir ihn im Voraus darauf hinweisen, dass dann jener Name, weil er das differenteste in sich schliesst, auch nothwendig mit der Zeit als überflüssig werde verworfen werden. Die Stellung der Geometrie zur Formenlehre hängt von dem Verhältniss ab, in welchem die Anschauung des Raumes zum reinen Denken steht. Wenn gleich wir nun sagten, es trete jene Anschauung dem Denken als selbstständig gegebenes gegenüber, so ist damit doch nicht behauptet, dass die Anschauung des Raumes uns erst aus der Betrachtung der räumlichen Dinge würde; sondern sie ist eine Grundanschauung, die mit dem Geöffnetsein unseres Sinnes für die sinnliche Welt uns mitgegeben ist, und die uns eben so ursprünglich anhaftet, wie der Leib der Seele. Auf gleiche Weise verhält es sich mit der Zeit und mit der auf die Anschauungen der Zeit und des Raumes gegründeten Bewegung, weshalb man auch die reine Bewegungslehre (Phorometrie) mit gleichem Rechte wie die Geometrie den mathematischen Wissenschaften beigezählt hat. Aus der Anschauung der Bewegung fliesst vermittelst des Gegensatzes von Ursache und Wirkung der Begriff der bewegenden Kraft, so dass also Geometrie, Phorometrie und Mechanik als Anwendungen der Formenlehre auf die Grundanschauungen der sinnlichen Welt erscheinen.

B. Ableitung des Begriffs der Ausdehnungslehre.

4. Jedes durch das Denken gewordene (vergl. Nr. 3) kann auf zwiefache Weise geworden sein, entweder durch einen einfachen Akt des **Erzeugens**, oder durch einen zwiefachen Akt des **Setzens**

und Verknüpfens. Das auf die erste Weise gewordene ist die stetige Form oder die Grösse im engeren Sinn, das auf die letztere Weise gewordene die diskrete oder Verknüpfungs-Form.

Der schlechthin einfache Begriff des Werdens giebt die stetige Form. Das bei der diskreten Form vor der Verknüpfung gesetzte ist zwar auch durch das Denken gesetzt, erscheint aber für den Akt des Verknüpfens als Gegebenes, und die Art, wie aus dem Gegebenen die diskrete Form wird, ist ein blosses Zusammendenken. Der Begriff des stetigen Werdens ist am leichtesten aufzufassen, wenn man ihn zuerst nach der Analogie der geläufigeren, diskreten Entstehungsweise betrachtet. Nämlich da bei der stetigen Erzeugung das jedesmal gewordene festgehalten, und das neu entstehende sogleich in dem Momente seines Entstehens mit jenem zusammengedacht wird: so kann man der Analogie wegen auch für die stetige Form dem Begriffe nach einen zwiefachen Akt des Setzens und Verknüpfens unterscheiden, aber beides hier zu Einem Akte vereinigt, und somit in eine unzertrennliche Einheit zusammengehend; nämlich von den beiden Gliedern der Verknüpfung (wenn wir diesen Ausdruck der Analogie wegen für einen Augenblick festhalten) ist das eine das schon gewordene das andere hingegen das in dem Momente des Verknüpfens selbst neu entstehende, also nicht ein vor dem Verknüpfen schon fertiges. Beide Akte also, nämlich des Setzens und Verknüpfens, gehen ganz in einander auf, so dass nicht eher verknüpt werden kann, als gesetzt ist, und nicht eher gesetzt werden darf, als verknüpft ist; oder wieder in der dem Stetigen zukommenden Ausdrucksweise gesprochen: das was neu entsteht, entsteht eben nur an dem schon gewordenen, ist also ein Moment des Werdens selbst, was hier in seinem weiteren Verlauf als Wachsen erscheint.

Der Gegensatz des Diskreten und Stetigen ist (wie alle wahren Gegensätze) einfliessender, indem das Diskrete auch kann als stetig betrachtet werden, und umgekehrt das Stetige als Diskret. Das Diskrete wird als Stetiges betrachtet, wenn das Verknüpfte selbst wieder als Gewordenes und der Akt des Verknüpfens als ein Moment des Werdens aufgefasst wird. Und das Stetige wird als Diskret betrachtet, wenn einzelne Momente des Werdens als blosse

Verknüpfungsakte aufgefasst, und das so verknüpfte für die Verknüpfung als Gegebenes betrachtet wird.

5. Jedes Besondere (Nr. 3) wird ein solches durch den Begriff des **Verschiedenen**, wodurch es einen anderen Besonderen nebengeordnet, und durch den des **Gleichen**, wodurch es mit anderem Besonderen demselben Allgemeinen untergeordnet wird. Das aus dem Gleichen gewordene können wir die **algebraische Form**, das aus dem Verschiedenen gewordene die **kombinatorische Form** nennen.

Der Gegensatz des Gleichen und Verschiedenen ist gleichfalls ein fliessender. Das Geiche ist verschieden, schon sofern das eine und das andere ihm Gleiche irgend wie gesondert ist (und ohne diese Sonderung wäre es nur Eins, also nicht Gleiches), das Verschiedene ist gleich, schon sofern beides durch die auf beides sich beziehende Thätigkeit verknüpft ist, also beides ein Verknüpftes ist. Darum verschwimmen aber nun beide Glieder keineswegs in einander, so dass man einen Massstab anzulegen hätte, durch den bestimmt würde, wie viel Gleiches gesetzt sei zwischen beiden Vorstellungen und wie viel Verschiedenes; sondern wenn auch dem Gleichen immer schon irgend wie das Verschiedene anhaftet und umgekehrt, so bildet doch nur jedesmal das Eine das Moment der Betrachtung, während das andere nur als die vorauszusetzende Grundlage des ersteren erscheint.

Unter der algebraischen Form ist hier nicht bloss die Zahl sondern auch das der Zahl im Gebiete des Stetigen entsprechende, und unter der kombinatorischen Form nicht nur die Kombination sondern auch das ihr im Stetigen entsprechende verstanden.

6. Aus der Durchkreuzung dieser beiden Gegensätze, von denen der erstere auf die Art der Erzeugung, der letztere auf die Elemente der Erzeugung sich bezieht, gehen die vier Gattungen der Formen, und die ihnen entsprechenden Zweige der Formenlehre hervor. Und zwar sondert sich zuerst die diskrete Form danach in

Zahl und Kombination (Gebinde). Zahl ist die algebraisch diskrete Form, d. h. sie ist die Zusammenfassung des als gleichgesetzten; die Kombination ist die kombinatorisch diskrete Form, d. h. sie ist die Zusammenfassung des als verschieden gesetzten. Die Wissenschaften des Diskreten sind also Zahlenlehre und Kombinationslehre (Verbindungslehre).

Dass hierdurch der Begriff der Zahl vollständig erschöpft und genau umgränzt ist, und ebenso der der Kombination, bedarf wohl kaum eines weiteren Nachweises. Und da die Gegensätze, durch welche diese Definitionen hervorgegangen sind, die einfachsten, in dem Begriffe der mathematischen Form unmittelbar mit gegeben sind, so ist hierdurch die obige Ableitung wohl hinlänglich gerechtfertigt*). Ich bemerke nur noch, wie dieser Gegensatz zwischen beiden Formen auf eine sehr reine Weise durch die differente Bezeichnung ihrer Elemente ausgedrückt ist, indem das zur Zahl verknüpfte mit einem und demselben Zeichen (1) bezeichnet wird, das zur Kombination verknüpfte mit verschiedenen, im Uebrigen ganz willkührlichen Zeichen (den Buchstaben). — Wie nun hiernach jede Menge von Dingen (Besonderheiten) als Zahl so gut, wie als Kombination aufgefasst werden kann, je nach der verschiedenen Betrachtungsweise, bedarf wohl kaum einer Erwähnung.

7. Eben so sondert sich die stetige Form oder die Grösse danach in die algebraisch-stetige Form oder die intensive Grösse, und in die kombinatorisch-stetige Form oder die extensive Grösse. Die intensive Grösse ist also das durch Erzeugung des Gleichen gewordene, die extensive Grösse oder die Ausdehnung ist das durch Erzeugung des Verschiedenen gewordene. Jene bildet als veränderliche Grösse die Grundlage der Funktionenlehre der

*) Der Begriff der Zahl und der Kombination ist schon vor 17 Jahren in einer von meinem Vater verfassten Abhandlung, über den Begriff der reinen Zahlenlehre, welche in dem Programme des Stettiner Gymnasiums von 1827 abgedruckt ist, auf ganz ähnliche Weise entwickelt worden, ohne aber zur Kenntniss eines grösseren Publikum gelangt zu sein.

Differenzial- und Integral-Rechnung, diese die Grundlage der Ausdehnungslehre.

Da von diesen beiden Zweigen der erstere der Zahlenlehre als höherer Zweig untergeordnet zu werden pflegt, der letztere aber noch als ein bisher unbekannter Zweig erscheint, so ist es nothwendig, diese ohnehin durch den Begriff des stetigen Fliessens schwierige Betrachtung näher zu erläutern. Wie in der Zahl die Einigung hervortritt, in der Kombination die Sonderung des Zusammengedachten, so auch in der intensiven Grösse die Einigung der Elemente, welche ihrem Begriff nach zwar noch gesondert sind, aber nur in ihrem wesentlichen sich gleich sein die intensive Grösse bilden, hingegen in der extensiven Grösse die Sonderung der Elemente, welche zwar, sofern sie Eine Grösse bilden, vereinigt sind, aber welche eben nur in ihrer Trennung von einander die Grösse konstituiren. Es ist also die intensive Grösse gleichsam die flüssig gewordene Zahl, die extensive Grösse die flüssig gewordene Kombination. Der lezteren ist wesentlich ein Auseinandertreten der Elemente und ein Festhalten derselben als aus einander seiender; das erzeugende Element erscheint bei ihr als ein sich änderndes, d. h. durch eine Verschiedenheit der Zustände hindurchgehendes, und die Gesammtheit dieser verschiedenen Zustände bildet eben das Gebiet der Ausdehnungsgrösse. Bei der intensiven Grösse hingegen liefert die Erzeugung derselben eine stetige Reihe sich selbst gleicher Zustände, deren Quantität eben die intensive Grösse ist. Als Beispiel für die extensive Grösse können wir am besten die begränzte Linie (Strecke) wählen, deren Elemente wesentlich aus einander treten und dadurch eben die Linie als Ausdehnung konstituiren; hingegen als Beispiel der intensiven Grösse etwa einen mit bestimmter Kraft begabten Punkt, indem hier die Elemente nicht sich entäussern, sondern nur in der Steigerung sich darstellen, also eine bestimmte Stufe der Steigerung bilden.

Auch hier zeigt sich die aufgestellte Differenz auf eine schöne Weise in der Bezeichnung; nämlich bei der intensiven Grösse, welche den Gegenstand der Funktionenlehre ausmacht, unterscheidet man nicht die Elemente durch besondere Zeichen, sondern wo besondere Zeichen hervortreten, da ist dadurch die ganze veränderliche Grösse bezeichnet. Hingegen bei der Ausdehnungsgrösse, oder deren konkreter Darstellung, der Linie, werden die verschienen Elemente auch mit verschiedenen Zeichen (den Buchstaben) bezeichnet, grade wie in der Kombinationslehre. Auch ist klar, wie jede reale Grösse auf zwiefache Weise kann angeschaut werden, als intensive und extensive; nämlich auch die Linie wird als intensive Grösse angeschaut, wenn man von der Art, wie ihre Elemente aus einander sind, absieht, und bloss die Quantität der Elemente auffasst, und eben so kann der mit einer Kraft begabte Punkt als extensive Grösse gedacht werden, indem man sich die Kraft in Form einer Linie vorstellt.

Historisch hat sich unter den vier Zweigen der Mathematik das Diskrete eher entwickelt als das Stetige (da jenes dem zergliedernden Verstande näher liegt als dieses), das Algebraische eher als das Kombinatorische (da das Gleiche leichter zusammengefasst wird als das Verschiedene). Daher ist die Zahlenlehre die früheste, Kombinationslehre und Differenzialrechnung sind gleichzeitig entstanden, und von ihnen allen musste die Ausdehnungslehre in ihrer abstrakten Form die späteste sein, während auf der andern Seite ihr konkretes (obwohl beschränktes) Abbild, die Raumlehre, schon der frühesten Zeit angehört.

8. Es kann der Zerspaltung der Formenlehre in die vier Zweige ein allgemeiner Theil vorangeschickt werden, welcher die allgemeinen, d. h. für alle vier Zweige gleich anwendbaren Verknüpfungsgesetze darstellt, und welchen wir die allgemeine Formenlehre nennen können.

Diesen Theil dem Ganzen vorauszuschicken, ist wesentlich, sofern dadurch nicht bloss die Wiederholung derselben Schlussreihen in allen vier Zweigen und selbst in den verschiedenen Abtheilungen desselben Zweiges erspart, und somit die Entwickelung bedeutend abgekürzt wird, sondern auch das dem Wesen nach zusammengehörige zusammen erscheint, und als Grundlage des Ganzen auftritt.

C. Darlegung des Begriffs der Ausdehnungslehre.

9. Das stetige Werden, in seine Momente zerlegt, erscheint als ein stetiges Entstehen mit Festhaltung des schon gewordenen. Bei der Ausdehnungsform ist das jedesmal neu entstehende als ein verschiedenes gesetzt; halten wir hierbei nun das jedesmal gewordene nicht fest, so gelangen wir zu dem Begriffe der stetigen Aenderung. Was diese Aenderung erfahrt, nennen wir das erzeugende Element, und das erzeugende Element in irgend einem der Zustände, den es bei seiner Aenderung annimmt, ein Element der stetigen Form. Hiernach ist also die Ausdehnungsform die Gesammtheit aller Elemente, in die das erzeugende Element bei stetiger Aenderung übergeht.

Der Begriff der stetigen Aenderung des Elements kann nur bei der Ausdehnungsgrösse hervortreten; bei der intensiven Grösse würde bei Aufgebung des jedesmal gewordenen nur der stetige Ansatz zum Werden als ein vollkommen leeres zurückbleiben.

In der Raumlehre erscheint als das Element der Punkt, als seine stetige Aenderung die Ortsänderung oder Bewegung, als seine verschiedenen Zustände die verschiedenen Lagen des Punktes im Raume.

10. Das Verschiedene muss nach einem Gesetze sich entwickeln, wenn das Erzeugniss ein bestimmtes sein soll. Dies Gesetz muss bei der einfachen Form dasselbe sein für alle Momente des Werdens. Die einfache Ausdehnungsform ist also die Form, welche durch eine nach demselben Gesetze erfolgende Aenderung des erzeugenden Elements entsteht; die Gesammtheit aller nach demselben Gesetz erzeugbaren Elemente nennen wir ein System oder ein Gebiet.

Die Verschiedenheit würde, da das von einem Gegebenen verschiedene unendlich mannigfach sein kann, sich gänzlich ins Unbestimmte verlaufen, wenn sie nicht einem festen Gesetze unterworfen wäre. Dies Gesetz ist nun aber in der reinen Formenlehre nicht durch irgend welchen Inhalt bestimmt; sondern durch die rein abstrakte Idee des Gesetzmässigen ist der Begriff der Ausdehnung und durch die desselben Gesetzes für alle Momente der Aenderung der Begriff der einfachen Ausdehnung bestimmt. Hiernach hat nun die einfache Ausdehnung die Beschaffenheit, dass, wenn aus einem Elemente derselben a durch einen Akt der Aenderung ein anderes Element b derselben Ausdehnung hervorgeht, dann aus b durch denselben Akt der Aenderung ein drittes Element derselben c hervorgeht.

In der Raumlehre ist die Gleichheit der Richtung das die einzelnen Aenderungen umfassende Gesetz, die Strecke in der Raumlehre entspricht also der einfachen Ausdehnung, die unendliche gerade Linie dem ganzen System.

11. Wendet man zwei verschiedene Gesetze der Aenderung an, so bildet die Gesammtheit der vermöge beider Gesetze erzeugbaren Elemente ein System zweiter Stufe. Die Gesetze der Aenderung, durch welche die Elemente dieses Systems aus einander hervorgehen können, sind von jenen beiden ersten abhängig; nimmt man noch ein drittes unabhängiges Gesetz hinzu, so gelangt man zu jenem Systeme dritter Stufe und so fort.

Als Beispiel möge hier wieder die Raumlehre dienen. In derselben werden bei zwei verschiedenen Richtungen aus einem Elemente die sämmtlichen Elemente einer Ebene erzeugt, indem nämlich das erzeugende Element beliebig viel nach beiden Richtungen nach einander fortschreitet, und die Gesammtheit der so erzeugbaren Punkte (Elemente) in eins zusammengefasst wird. Die Ebene ist also das System zweiter Stufe; in ihr ist eine unendliche Menge von Richtungen enthalten, welche von jenen beiden ersten abhängen. Nimmt man eine dritte unabhängige Richtung hinzu, so wird vermittelst ihrer der ganze unendliche Raum (als System dritter Stufe) erzeugt; und weiter als bis zu den unabhängigen Richtungen (Aenderungsgesetzen) kann man hier nicht kommen, während sich in der reinen Ausdehnungslehre die Anzahl derselben bis ins Unendliche steigern kann.

12. Die Verschiedenheit der Gesetze erfordert wieder zu ihrer genaueren Bestimmung eine Erzeugungsweise, vermöge deren das eine