CAMBRIDGE LIBRARY COLLECTION

Books of enduring scholarly value

Mathematics

From its pre-historic roots in simple counting to the algorithms powering modern desktop computers, from the genius of Archimedes to the genius of Einstein, advances in mathematical understanding and numerical techniques have been directly responsible for creating the modern world as we know it. This series will provide a library of the most influential publications and writers on mathematics in its broadest sense. As such, it will show not only the deep roots from which modern science and technology have grown, but also the astonishing breadth of application of mathematical techniques in the humanities and social sciences, and in everyday life.

Was Sind und was Sollen die Zahlen?

The nineteenth century saw the paradoxes and obscurities of eighteenth-century calculus gradually replaced by the exact theorems and statements of rigorous analysis. It became clear that all analysis could be deduced from the properties of the real numbers. But what are the real numbers and why do they have the properties we claim they do? In this charming and influential book, Richard Dedekind (1831–1916), Professor at the Technische Hochschule in Braunschweig, shows how to resolve this problem starting from elementary ideas. His method of constructing the reals from the rationals (the Dedekind cut) remains central to this day and was generalised by Conway in his construction of the 'surreal numbers'. This reissue of Dedekind's 1888 classic is of the 'second, unaltered' 1893 edition.

Cambridge University Press has long been a pioneer in the reissuing of out-of-print titles from its own backlist, producing digital reprints of books that are still sought after by scholars and students but could not be reprinted economically using traditional technology. The Cambridge Library Collection extends this activity to a wider range of books which are still of importance to researchers and professionals, either for the source material they contain, or as landmarks in the history of their academic discipline.

Drawing from the world-renowned collections in the Cambridge University Library and other partner libraries, and guided by the advice of experts in each subject area, Cambridge University Press is using state-of-the-art scanning machines in its own Printing House to capture the content of each book selected for inclusion. The files are processed to give a consistently clear, crisp image, and the books finished to the high quality standard for which the Press is recognised around the world. The latest print-on-demand technology ensures that the books will remain available indefinitely, and that orders for single or multiple copies can quickly be supplied.

The Cambridge Library Collection brings back to life books of enduring scholarly value (including out-of-copyright works originally issued by other publishers) across a wide range of disciplines in the humanities and social sciences and in science and technology.

Was Sind und was Sollen die Zahlen?

Richard Dedekind

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town,
Singapore, São Paolo, Delhi, Mexico City

Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York

www.cambridge.org
Information on this title: www.cambridge.org/9781108050388

This edition first published 1893
This digitally printed version 2012

ISBN 978-1-108-05038-8 Paperback

Was sind und was sollen
die
Zahlen?

Was sind und was sollen die Zahlen?

Von

Richard Dedekind,
Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig.

Zweite unveränderte Auflage.

Ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει.

Braunschweig,
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.
1893.

Meiner Schwester

Julie

und meinem Bruder

Adolf,

Dr. jur., Oberlandesgerichtsrath zu Braunschweig

in

herzlicher Liebe

gewidmet.

Cambridge University Press
978-1-108-05038-8 - Was Sind und was Sollen die Zahlen?
Richard Dedekind
Frontmatter
More information

Vorwort zur ersten Auflage.

Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden. So einleuchtend diese Forderung erscheint, so ist sie doch, wie ich glaube, selbst bei der Begründung der einfachsten Wissenschaft, nämlich desjenigen Theiles der Logik, welcher die Lehre von den Zahlen behandelt, auch nach den neuesten Darstellungen*) noch keineswegs als erfüllt anzusehen. Indem ich die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Theil der Logik nenne, spreche ich schon aus, daß ich den Zahlbegriff für gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit, daß ich ihn vielmehr für einen unmittelbaren Ausfluß der reinen Denkgesetze halte. Meine Hauptantwort auf die im Titel dieser Schrift gestellte Frage lautet: die Zahlen sind freie Schöpfungen

*) Von den mir bekannt gewordenen Schriften erwähne ich das verdienstvolle Lehrbuch der Arithmetik und Algebra von E. Schröder (Leipzig, 1873), in welchem man auch ein Literaturverzeichniß findet, und außerdem die Abhandlungen von Kronecker und von Helmholtz über den Zahlbegriff und über Zählen und Messen (in der Sammlung der an E. Zeller gerichteten philosophischen Aufsätze, Leipzig 1887). Das Erscheinen dieser Abhandlungen ist die Veranlassung, welche mich bewogen hat, nun auch mit meiner, in mancher Beziehung ähnlichen, aber durch ihre Begründung doch wesentlich verschiedenen Auffassung hervorzutreten, die ich mir seit vielen Jahren und ohne jede Beeinflussung von irgend welcher Seite gebildet habe.

des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlen-Reich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlen-Reich beziehen*). Verfolgt man genau, was wir bei dem Zählen der Menge oder Anzahl von Dingen thun, so wird man auf die Betrachtung der Fähigkeit des Geistes geführt, Dinge auf Dinge zu beziehen, einem Dinge ein Ding entsprechen zu lassen, oder ein Ding durch ein Ding abzubilden, ohne welche Fähigkeit überhaupt kein Denken möglich ist. Auf dieser einzigen, auch sonst ganz unentbehrlichen Grundlage muß nach meiner Ansicht, wie ich auch schon bei einer Ankündigung der vorliegenden Schrift ausgesprochen habe**), die gesammte Wissenschaft der Zahlen errichtet werden. Die Absicht einer solchen Darstellung habe ich schon vor der Herausgabe meiner Schrift über die Stetigkeit gefaßt, aber erst nach Erscheinen derselben, und mit vielen Unterbrechungen, die durch gesteigerte Amtsgeschäfte und andere nothwendige Arbeiten veranlaßt wurden, habe ich in den Jahren 1872 bis 1878 auf wenigen Blättern einen ersten Entwurf aufgeschrieben, welchen dann mehrere Mathematiker eingesehen und theilweise mit mir besprochen haben. Er trägt denselben Titel und enthält, wenn auch nicht auf das Beste geordnet, doch alle wesentlichen Grundgedanken meiner vorliegenden Schrift, die nur deren sorgfältige Ausführung giebt; als solche Hauptpuncte erwähne ich hier die scharfe Unterscheidung des Endlichen vom Unendlichen (64), den Begriff der Anzahl von Dingen (161), den Nachweis, daß die unter dem Namen der vollständigen Induc-

*) Vergl. §. 3 meiner Schrift: Stetigkeit und irrationale Zahlen (Braunschweig, 1872).

**) Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, dritte Auflage, 1879, §. 163, Anmerkung auf S. 470.

tion (oder des Schlusses von n auf $n+1$) bekannte Beweisart wirklich beweiskräftig (59, 60, 80), und daß auch die Definition durch Induction (oder Recursion) bestimmt und widerspruchsfrei ist (126).

Diese Schrift kann Jeder verstehen, welcher Das besitzt, was man den gesunden Menschenverstand nennt; philosophische oder mathematische Schulkenntnisse sind dazu nicht im Geringsten erforderlich. Aber ich weiß sehr wohl, daß gar Mancher in den schattenhaften Gestalten, die ich ihm vorführe, seine Zahlen, die ihn als treue und vertraute Freunde durch das ganze Leben begleitet haben, kaum wiedererkennen mag; er wird durch die lange, der Beschaffenheit unseres Treppen-Verstandes entsprechende Reihe von einfachen Schlüssen, durch die nüchterne Zergliederung der Gedankenreihen, auf denen die Gesetze der Zahlen beruhen, abgeschreckt und ungeduldig darüber werden, Beweise für Wahrheiten verfolgen zu sollen, die ihm nach seiner vermeintlichen inneren Anschauung von vornherein einleuchtend und gewiß erscheinen. Ich erblicke dagegen gerade in der Möglichkeit, solche Wahrheiten auf andere, einfachere zurückzuführen, mag die Reihe der Schlüsse noch so lang und scheinbar künstlich sein, einen überzeugenden Beweis dafür, daß ihr Besitz oder der Glaube an sie niemals unmittelbar durch innere Anschauung gegeben, sondern immer nur durch eine mehr oder weniger vollständige Wiederholung der einzelnen Schlüsse erworben ist. Ich möchte diese, der Schnelligkeit ihrer Ausführung wegen schwer zu verfolgende Denkthätigkeit mit derjenigen vergleichen, welche ein vollkommen geübter Leser beim Lesen verrichtet; auch dieses Lesen bleibt immer eine mehr oder weniger vollständige Wiederholung der einzelnen Schritte, welche der Anfänger bei dem mühseligen Buchstabiren auszuführen hat; ein sehr kleiner Theil derselben, und deshalb eine sehr kleine Arbeit oder Anstrengung des Geistes reicht aber für den geübten Leser schon aus, um das richtige, wahre Wort zu erkennen, freilich nur mit sehr großer Wahrscheinlichkeit; denn bekanntlich begegnet es auch dem geübtesten Corrector von Zeit zu Zeit, einen Druckfehler stehen zu lassen, d. h. falsch zu lesen, was unmöglich wäre, wenn die zum Buchstabiren gehörige Gedankenkette vollständig wiederholt würde. So sind wir auch schon von unserer Geburt an beständig und in immer steigendem Maße veranlaßt, Dinge auf Dinge zu beziehen und damit diejenige Fähigkeit des Geistes zu üben, auf welcher auch die Schöpfung der Zahlen beruht; durch diese schon in unsere ersten Lebensjahre fallende unabläßige, wenn auch absichtslose Uebung und die damit verbundene Bildung von Urtheilen und Schlußreihen erwerben wir uns auch einen Schatz von eigentlich arithmetischen Wahrheiten, auf welche später unsere ersten Lehrer sich wie auf etwas Einfaches, Selbstverständliches, in der inneren Anschauung Gegebenes berufen, und so kommt es, daß manche, eigentlich sehr zusammengesetzte Begriffe (wie z. B. der der Anzahl von Dingen) fälschlich für einfach gelten. In diesem Sinne, den ich durch die, einem bekannten Spruche nachgebildeten Worte ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει bezeichne, mögen die folgenden Blätter als ein Versuch, die Wissenschaft der Zahlen auf einheitlicher Grundlage zu errichten, wohlwollende Aufnahme finden, und mögen sie andere Mathematiker dazu anregen, die langen Reihen von Schlüssen auf ein bescheideneres, angenehmeres Maß zurückzuführen.

Dem Zwecke dieser Schrift gemäß beschränke ich mich auf die Betrachtung der Reihe der sogenannten natürlichen Zahlen. In welcher Art später die schrittweise Erweiterung des Zahlbegriffes, die Schöpfung der Null, der negativen, gebrochenen, irrationalen und complexen Zahlen stets durch Zurückführung auf die früheren Begriffe herzustellen ist, und zwar ohne jede Einmischung fremdartiger Vorstellungen (wie z. B. der der meßbaren Größen), die nach meiner Auffassung erst durch die Zahlen-Wissenschaft zu vollständiger Klarheit erhoben werden können, das habe ich wenigstens an dem Beispiele der irrationalen Zahlen in meiner früheren Schrift über die Stetigkeit (1872) gezeigt; in ganz ähnlicher Weise lassen sich, wie ich daselbst (§. 3) auch schon ausgesprochen habe, die anderen Erweiterungen leicht behandeln, und ich behalte mir vor, diesem Gegenstande eine zusammenhängende Darstellung zu widmen. Gerade bei dieser Auffassung erscheint es als etwas Selbstverständliches und durchaus nicht Neues, daß jeder, auch noch so fern liegende Satz der Algebra und höheren Analysis sich als ein Satz über die natürlichen Zahlen aussprechen läßt, eine Behauptung, die ich auch wiederholt aus dem Munde von Dirichlet gehört habe. Aber ich erblicke keineswegs etwas Verdienstliches darin — und das lag auch Dirichlet gänzlich fern —, diese mühselige Umschreibung wirklich vornehmen und keine anderen, als die natürlichen Zahlen benutzen und anerkennen zu wollen. Im Gegentheil, die größten und fruchtbarsten Fortschritte in der Mathematik und anderen Wissenschaften sind vorzugsweise durch die Schöpfung und Einführung neuer Begriffe gemacht, nachdem die häufige Wiederkehr zusammengesetzter Erscheinungen, welche von den alten Begriffen nur mühselig beherrscht werden, dazu gedrängt hat. Ueber diesen Gegenstand habe ich im Sommer 1854 bei Gelegenheit meiner Habilitation als Privatdocent zu Göttingen einen Vortrag vor der philosophischen Facultät zu halten gehabt, dessen Absicht auch von Gauß gebilligt wurde; doch ist hier nicht der Ort, näher darauf einzugehen.

Ich benutze statt dessen die Gelegenheit, noch einige Bemerkungen zu machen, die sich auf meine frühere, oben erwähnte Schrift über Stetigkeit und irrationale Zahlen beziehen. Die in ihr vorgetragene, im Herbste 1858 erdachte Theorie der irrationalen Zahlen gründet sich auf diejenige, im Gebiete der rationalen Zahlen auftretende Erscheinung (§. 4), die ich mit dem Namen eines Schnittes belegt und zuerst genau erforscht habe, und sie gipfelt in dem Beweise der Stetigkeit des neuen Gebietes der reellen Zahlen (§. 5. IV). Sie scheint mir etwas einfacher, ich möchte sagen ruhiger, zu sein, als die beiden von ihr und von einander verschiedenen Theorien, welche von den Herren Weierstraß und G. Cantor aufgestellt sind und ebenfalls vollkommene Strenge besitzen. Sie ist später ohne wesentliche Aenderung von Herrn U. Dini in die Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali (Pisa, 1878) aufgenommen; aber der Umstand, daß mein Name im Laufe dieser Darstellung nicht bei der Beschreibung der rein arithmetischen Erscheinung des Schnittes, sondern zufällig gerade da erwähnt wird, wo es sich um die Existenz einer dem Schnitte entsprechenden meßbaren Größe handelt, könnte leicht zu der Vermuthung führen, daß meine Theorie sich auf die Betrachtung solcher Größen stützte. Nichts könnte unrichtiger sein; vielmehr habe ich im §. 3 meiner Schrift verschiedene Gründe angeführt, weshalb ich die Einmischung der meßbaren Größen gänzlich verwerfe, und namentlich am Schlusse hinsichtlich deren Existenz bemerkt, daß für einen großen Theil der Wissenschaft vom Raume die Stetigkeit seiner Gebilde gar nicht einmal eine nothwendige Voraussetzung ist, ganz abgesehen davon, daß sie in den Werken über Geometrie zwar wohl dem Namen nach beiläufig erwähnt, aber niemals deutlich erklärt, also auch nicht für Beweise zugänglich gemacht wird. Um dies noch näher zu erläutern, bemerke ich beispielsweise Folgendes. Wählt man drei nicht in einer Geraden liegende Puncte A, B, C nach Belieben, nur mit der Beschränkung, daß die Verhältnisse ihrer Entfernungen AB, AC, BC algebraische*) Zahlen sind, und sieht man im Raume nur diejenigen Puncte M als vorhanden an, für welche die Verhältnisse von AM, BM, CM zu AB ebenfalls algebraische Zahlen sind, so ist der aus diesen Puncten M bestehende Raum, wie leicht zu sehen, überall unstetig; aber trotz der Unstetigkeit, Lückenhaftigkeit dieses Raumes sind in ihm, so viel ich sehe, alle

*) Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, §. 159 der zweiten, §. 160 der dritten Auflage.

Constructionen, welche in Euklid's Elementen auftreten, genau ebenso ausführbar, wie in dem vollkommen stetigen Raume; die Unstetigkeit dieses Raumes würde daher in Euklid's Wissenschaft gar nicht bemerkt, gar nicht empfunden werden. Wenn mir aber Jemand sagt, wir könnten uns den Raum gar nicht anders als stetig denken, so möchte ich das bezweifeln und darauf aufmerksam machen, eine wie weit vorgeschrittene, feine wissenschaftliche Bildung erforderlich ist, um nur das Wesen der Stetigkeit deutlich zu erkennen und um zu begreifen, daß außer den rationalen Größen-Verhältnissen auch irrationale, außer den algebraischen auch transcendente denkbar sind. Um so schöner erscheint es mir, daß der Mensch ohne jede Vorstellung von meßbaren Größen, und zwar durch ein endliches System einfacher Denkschritte sich zur Schöpfung des reinen, stetigen Zahlenreiches aufschwingen kann; und erst mit diesem Hülfsmittel wird es ihm nach meiner Ansicht möglich, die Vorstellung vom stetigen Raume zu einer deutlichen auszubilden.

Dieselbe, auf die Erscheinung des Schnittes gegründete Theorie der irrationalen Zahlen findet man auch dargestellt in der Introduction à la théorie des fonctions d'une variable von J. Tannery (Paris, 1886). Wenn ich eine Stelle der Vorrede dieses Werkes richtig verstehe, so hat der Herr Verfasser diese Theorie selbständig, also zu einer Zeit erdacht, wo ihm nicht nur meine Schrift, sondern auch die in derselben Vorrede erwähnten Fondamenti von Dini noch unbekannt waren; diese Uebereinstimmung scheint mir ein erfreulicher Beweis dafür zu sein, daß meine Auffassung der Natur der Sache entspricht, was auch von anderen Mathematikern, z. B. von Herrn M. Pasch in seiner Einleitung in die Differential- und Integralrechnung (Leipzig, 1883) anerkannt ist. Dagegen kann ich Herrn Tannery nicht ohne Weiteres beistimmen, wenn er diese Theorie die Entwickelung eines von Herrn J. Bertrand herrührenden Gedankens nennt, welcher in dessen

Traité d'arithmétique enthalten sei und darin bestehe, eine irrationale Zahl zu definiren durch Angabe aller rationalen Zahlen, die kleiner, und aller derjenigen, die größer sind als die zu definirende Zahl. Zu diesem Ausspruch, der von Herrn O. Stolz — wie es scheint, ohne nähere Prüfung — in der Vorrede zum zweiten Theile seiner Vorlesungen über allgemeine Arithmetik (Leipzig, 1886) wiederholt ist, erlaube ich mir Folgendes zu bemerken. Daß eine irrationale Zahl durch die eben beschriebene Angabe in der That als vollständig bestimmt anzusehen ist, diese Ueberzeugung ist ohne Zweifel auch vor Herrn Bertrand immer Gemeingut aller Mathematiker gewesen, die sich mit dem Begriffe des Irrationalen beschäftigt haben; jedem Rechner, der eine irrationale Wurzel einer Gleichung näherungsweise berechnet, schwebt gerade diese Art ihrer Bestimmung vor; und wenn man, wie es Herr Bertrand in seinem Werke ausschließlich thut (mir liegt die achte Auflage aus dem Jahre 1885 vor), die irrationale Zahl als Verhältniß meßbarer Größen auffaßt, so ist diese Art ihrer Bestimmtheit schon auf das Deutlichste in der berühmten Definition ausgesprochen, welche Euklid (Elemente V. 5) für die Gleichheit der Verhältnisse aufstellt. Eben diese uralte Ueberzeugung ist nun gewiß die Quelle meiner Theorie, wie derjenigen des Herrn Bertrand und mancher anderen, mehr oder weniger durchgeführten Versuche gewesen, die Einführung der irrationalen Zahlen in die Arithmetik zu begründen. Aber wenn man Herrn Tannery soweit vollständig beistimmen wird, so muß man bei einer wirklichen Prüfung doch sofort bemerken, daß die Darstellung des Herrn Bertrand, in der die Erscheinung des Schnittes in ihrer logischen Reinheit gar nicht einmal erwähnt wird, mit der meinigen durchaus keine Aehnlichkeit hat, insofern sie sogleich ihre Zuflucht zu der Existenz einer meßbaren Größe nimmt, was ich aus den oben besprochenen Gründen gänzlich verwerfe; und abgesehen von diesem Umstande scheint mir diese Darstellung auch in den nachfolgenden, auf die Annahme dieser Existenz gegründeten

Definitionen und Beweisen noch einige so wesentliche Lücken darzubieten, daß ich die in meiner Schrift (§. 6) ausgesprochene Behauptung, der Satz $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$ sei noch nirgends streng bewiesen, auch in Hinsicht auf dieses, in mancher anderen Beziehung treffliche Werk, welches ich damals noch nicht kannte, für gerechtfertigt halte.

Harzburg, 5. October 1887.

R. Dedekind.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die vorliegende Schrift hat bald nach ihrem Erscheinen neben günstigen auch ungünstige Beurtheilungen gefunden, ja es sind ihr arge Fehler vorgeworfen. Ich habe mich von der Richtigkeit dieser Vorwürfe nicht überzeugen können und lasse jetzt die seit Kurzem vergriffene Schrift, zu deren öffentlicher Vertheidigung es mir an Zeit fehlt, ohne jede Aenderung wieder abdrucken, indem ich nur folgende Bemerkungen dem ersten Vorworte hinzufüge.

Die Eigenschaft, welche ich als Definition (64) des unendlichen Systems benutzt habe, ist schon vor dem Erscheinen meiner Schrift von G. Cantor (Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, Crelle's Journal, Bd. 84; 1878), ja sogar schon von Bolzano (Paradoxien des Unendlichen §. 20; 1851) hervorgehoben. Aber keiner der genannten Schriftsteller hat den Versuch gemacht, diese Eigenschaft zur Definition des Unendlichen zu erheben und auf dieser Grundlage die Wissenschaft von den Zahlen streng logisch aufzubauen, und gerade hierin besteht der Inhalt meiner mühsamen Arbeit, die ich in allem Wesentlichen schon mehrere Jahre vor dem Erscheinen der Abhandlung von G. Cantor und zu einer Zeit vollendet hatte, als mir das Werk von Bolzano selbst dem Namen nach gänzlich unbekannt war. Für Diejenigen, welche Interesse und Verständniß für die Schwierigkeiten einer solchen Untersuchung haben, bemerke ich noch Folgendes. Man kann eine ganz andere Definition des Endlichen und Unendlichen aufstellen, welche insofern noch einfacher erscheint, als bei ihr nicht einmal der Begriff der Aehnlichkeit einer Abbildung (26) vorausgesetzt wird, nämlich:

„Ein System S heißt endlich, wenn es sich so in sich selbst abbilden läßt (36), daß kein echter Theil (6) von S in sich selbst abgebildet wird; im entgegengesetzten Falle heißt S ein unendliches System."

Nun mache man einmal den Versuch, auf dieser neuen Grundlage das Gebäude zu errichten! Man wird alsbald auf große Schwierigkeiten stoßen, und ich glaube behaupten zu dürfen, daß selbst der Nachweis der vollständigen Uebereinstimmung dieser Definition mit der früheren nur dann (und dann auch leicht) gelingt, wenn man die Reihe der natürlichen Zahlen schon als entwickelt ansehen und auch die Schlußbetrachtung in (131) zu Hülfe nehmen darf; und doch ist von allen diesen Dingen weder in der einen noch in der anderen Definition die Rede! Man wird dabei erkennen, wie sehr groß die Anzahl der Gedankenschritte ist, die zu einer solchen Umformung einer Definition erforderlich sind.

Etwa ein Jahr nach der Herausgabe meiner Schrift habe ich die schon im Jahre 1884 erschienenen Grundlagen der Arithmetik von G. Frege kennen gelernt. Wie verschieden die in diesem Werke niedergelegte Ansicht über das Wesen der Zahl von der meinigen auch sein mag, so enthält es, namentlich von §. 79 an, doch auch sehr nahe Berührungspuncte mit meiner Schrift, insbesondere mit meiner Erklärung (44). Freilich ist die Uebereinstimmung wegen der abweichenden Ausdrucksweise nicht leicht zu erkennen; aber schon die Bestimmtheit, mit welcher der Verfasser sich über die Schlußweise von n auf $n + 1$ ausspricht (unten auf S. 93), zeigt deutlich, daß er hier auf demselben Boden mit mir steht.

Inzwischen sind (1890 — 1891) die Vorlesungen über die Algebra der Logik von E. Schröder fast vollständig erschienen.

Auf die Bedeutung dieses höchst anregenden Werkes, dem ich meine größte Anerkennung zolle, hier näher einzugehen ist unmöglich; vielmehr möchte ich mich nur entschuldigen, daß ich trotz der auf S. 253 des ersten Theiles gemachten Bemerkung meine etwas schwerfälligen Bezeichnungen (8) und (17) doch beibehalten habe; dieselben machen keinen Anspruch darauf, allgemein angenommen zu werden, sondern bescheiden sich, lediglich den Zwecken dieser arithmetischen Schrift zu dienen, wozu sie nach meiner Ansicht besser geeignet sind, als Summen- und Productzeichen.

Harzburg, 24. August 1893.

R. Dedekind.

Inhalt.