§. 1.

Systeme von Elementen.

1. Im Folgenden verstehe ich unter einem Ding jeden Gegenstand unseres Denkens. Um bequem von den Dingen sprechen zu können, bezeichnet man sie durch Zeichen, z. B. durch Buchstaben, und man erlaubt sich, kurz von dem Ding a oder gar von a zu sprechen, wo man in Wahrheit das durch a bezeichnete Ding, keineswegs den Buchstaben a selbst meint. Ein Ding ist vollständig bestimmt durch alles Das, was von ihm ausgesagt oder gedacht werden kann. Ein Ding a ist dasselbe wie b (identisch mit b), und b dasselbe wie a, wenn Alles, was von a gedacht werden kann, auch von b, und wenn Alles, was von b gilt, auch von a gedacht werden kann. Daß a und b nur Zeichen oder Namen für ein und dasselbe Ding sind, wird durch das Zeichen $a = b$, und ebenso durch $b = a$ angedeutet. Ist außerdem $b = c$, ist also c ebenfalls wie a, ein Zeichen für das mit b bezeichnete Ding, so ist auch $a = c$. Ist die obige Uebereinstimmung des durch a bezeichneten Dinges mit dem durch b bezeichneten Dinge nicht vorhanden, so heißen diese Dinge a, b verschieden, a ist ein anderes Ding wie b, b ein anderes Ding wie a; es giebt irgend eine Eigenschaft, die dem einen zukommt, dem anderen nicht zukommt.

2. Es kommt sehr häufig vor, daß verschiedene Dinge $a, b, c \ldots$ aus irgend einer Veranlassung unter einem gemeinsamen Gesichts-

puncte aufgefaßt, im Geiste zusammengestellt werden, und man sagt dann, daß sie ein System S bilden; man nennt die Dinge $a, b, c \ldots$ die Elemente des Systems S, sie sind enthalten in S; umgekehrt besteht S aus diesen Elementen. Ein solches System S (oder ein Inbegriff, eine Mannigfaltigkeit, eine Gesammtheit) ist als Gegenstand unseres Denkens ebenfalls ein Ding (1); es ist vollständig bestimmt, wenn von jedem Ding bestimmt ist, ob es Element von S ist oder nicht *). Das System S ist daher dasselbe wie das System T, in Zeichen $S = T$, wenn jedes Element von S auch Element von T, und jedes Element von T auch Element von S ist. Für die Gleichförmigkeit der Ausdrucksweise ist es vortheilhaft, auch den besonderen Fall zuzulassen, daß ein System S aus einem einzigen (aus einem und nur einem) Element a besteht, d. h. daß das Ding a Element von S, aber jedes von a verschiedene Ding kein Element von S ist. Dagegen wollen wir das leere System, welches gar kein Element enthält, aus gewissen Gründen hier ganz ausschließen, obwohl es für andere Untersuchungen bequem sein kann, ein solches zu erdichten.

3. Erklärung. Ein System A heißt Theil eines Systems S, wenn jedes Element von A auch Element von S ist. Da diese Beziehung zwischen einem System A und einem System S im Folgenden immer wieder zur Sprache kommen wird, so wollen wir dieselbe zur Abkürzung durch das Zeichen $A \mathfrak{3} S$ ausdrücken. Das

---

*) Auf welche Weise diese Bestimmtheit zu Stande kommt, und ob wir einen Weg kennen, um hierüber zu entscheiden, ist für alles Folgende gänzlich gleichgültig; die zu entwickelnden allgemeinen Gesetze hängen davon gar nicht ab, sie gelten unter allen Umständen. Ich erwähne dies ausdrücklich, weil Herr Kronecker vor Kurzem (im Band 99 des Journals für Mathematik, S. 334 bis 336) der freien Begriffsbildung in der Mathematik gewisse Beschränkungen hat auferlegen wollen, die ich nicht als berechtigt anerkenne; näher hierauf einzugehen erscheint aber erst dann geboten, wenn der ausgezeichnete Mathematiker seine Gründe für die Nothwendigkeit oder auch nur die Zweckmäßigkeit dieser Beschränkungen veröffentlicht haben wird.

umgekehrte Zeichen $S \in A$, wodurch dieselbe Thatsache bezeichnet werden könnte, werde ich der Deutlichkeit und Einfachheit halber gänzlich vermeiden, aber ich werde in Ermangelung eines besseren Wortes bisweilen sagen, daß S Ganzes von A ist, wodurch also ausgedrückt werden soll, daß unter den Elementen von S sich auch alle Elemente von A befinden. Da ferner jedes Element s eines Systems S nach 2 selbst als System aufgefaßt werden kann, so können wir auch hierauf die Bezeichnung $s \ni S$ anwenden.

4. Satz. Zufolge 3 ist $A \ni A$.

5. Satz. Ist $A \ni B$ und $B \ni A$, so ist $A = B$.

Der Beweis folgt aus 3, 2.

6. Erklärung. Ein System A heißt echter Theil von S, wenn A Theil von S, aber verschieden von S ist. Nach 5 ist dann S kein Theil von A, d. h. (3) es giebt in S ein Element, welches kein Element von A ist.

7. Satz. Ist $A \ni B$, und $B \ni C$, was auch kurz durch $A \ni B \ni C$ bezeichnet werden kann, so ist $A \ni C$, und zwar ist A gewiß echter Theil von C, wenn A echter Theil von B, oder wenn B echter Theil von C ist.

Der Beweis folgt aus 3, 6.

8. Erklärung. Unter dem aus irgend welchen Systemen $A, B, C\ldots$ zusammengesetzten System, welches mit $\mathfrak{M}(A, B, C\ldots)$ bezeichnet werden soll, wird dasjenige System verstanden, dessen Elemente durch folgende Vorschrift bestimmt werden: ein Ding gilt dann und nur dann als Element von $\mathfrak{M}(A, B, C\ldots)$, wenn es Element von irgend einem der Systeme $A, B, C\ldots$, d. h. Element von A oder B oder $C\ldots$ ist. Wir lassen auch den Fall zu, daß nur ein einziges System A vorliegt; dann ist offenbar $\mathfrak{M}(A) = A$. Wir bemerken ferner, daß das aus $A, B, C\ldots$ zusammengesetzte System $\mathfrak{M}(A, B, C\ldots)$ wohl zu unterscheiden ist von demjenigen System, dessen Elemente die Systeme $A, B, C\ldots$ selbst sind.

Cambridge University Press
978-1-108-05038-8 - Was Sind und was Sollen die Zahlen?
Richard Dedekind
Excerpt
More information

9. Satz. Die Systeme $A, B, C \ldots$ sind Theile von

$$\mathfrak{M}(A, B, C \ldots).$$

Der Beweis folgt aus 8, 3.

10. Satz. Sind $A, B, C \ldots$ Theile eines Systems S, so ist $\mathfrak{M}(A, B, C \ldots) \mathfrak{3} S$.

Der Beweis folgt aus 8, 3.

11. Satz. Ist P Theil von einem der Systeme $A, B, C \ldots$, so ist $P \mathfrak{3} \mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$.

Der Beweis folgt aus 9, 7.

12. Satz. Ist jedes der Systeme $P, Q \ldots$ Theil von einem der Systeme $A, B, C \ldots$, so ist $\mathfrak{M}(P, Q \ldots) \mathfrak{3} \mathfrak{M}(A, B, C \ldots)$.

Der Beweis folgt aus 11, 10.

13. Satz. Ist A zusammengesetzt aus irgend welchen der Systeme $P, Q \ldots$, so ist $A \mathfrak{3} \mathfrak{M}(P, Q \ldots)$.

Beweis. Denn jedes Element von A ist nach 8 Element von einem der Systeme $P, Q \ldots$, folglich nach 8 auch Element von $\mathfrak{M}(P, Q \ldots)$, woraus nach 3 der Satz folgt.

14. Satz. Ist jedes der Systeme $A, B, C \ldots$ zusammengesetzt aus irgend welchen der Systeme $P, Q \ldots$, so ist

$$\mathfrak{M}(A, B, C \ldots) \mathfrak{3} \mathfrak{M}(P, Q \ldots).$$

Der Beweis folgt aus 13, 10.

15. Satz. Ist jedes der Systeme $P, Q \ldots$ Theil von einem der Systeme $A, B, C \ldots$, und ist jedes der letzteren zusammengesetzt aus irgend welchen der ersteren, so ist

$$\mathfrak{M}(P, Q \ldots) = \mathfrak{M}(A, B, C \ldots).$$

Der Beweis folgt aus 12, 14, 5.

16. Satz. Ist $A = \mathfrak{M}(P, Q)$, und $B = \mathfrak{M}(Q, R)$, so ist $\mathfrak{M}(A, R) = \mathfrak{M}(P, B)$.

Beweis. Denn nach dem vorhergehenden Satze 15 ist sowohl $\mathfrak{M}(A, R)$ als $\mathfrak{M}(P, B) = \mathfrak{M}(P, Q, R)$.

17. Erklärung. Ein Ding g heißt gemeinsames Element der Systeme $A, B, C \ldots$, wenn es in jedem dieser Systeme (also

in A und in B und in $C\ldots$) enthalten ist. Ebenso heißt ein System T ein Gemeintheil von $A, B, C\ldots$, wenn T Theil von jedem dieser Systeme ist, und unter der Gemeinheit der Systeme $A, B, C\ldots$ verstehen wir das vollständig bestimmte System $\mathfrak{G}(A, B, C\ldots)$, welches aus allen gemeinsamen Elementen g von $A, B, C\ldots$ besteht und folglich ebenfalls ein Gemeintheil derselben Systeme ist. Wir lassen auch wieder den Fall zu, daß nur ein einziges System A vorliegt; dann ist $\mathfrak{G}(A) = A$ zu setzen. Es kann aber auch der Fall eintreten, daß die Systeme $A, B, C\ldots$ gar kein gemeinsames Element, also auch keinen Gemeintheil, keine Gemeinheit besitzen; sie heißen dann Systeme ohne Gemeintheil, und das Zeichen $\mathfrak{G}(A, B, C\ldots)$ ist bedeutungslos (vergl. den Schluß von 2). Wir werden es aber fast immer dem Leser überlassen, bei Sätzen über Gemeinheiten die Bedingung ihrer Existenz hinzuzudenken und die richtige Deutung dieser Sätze auch für den Fall der Nicht-Existenz zu finden.

18. Satz. Jeder Gemeintheil von $A, B, C\ldots$ ist Theil von $\mathfrak{G}(A, B, C\ldots)$.

Der Beweis folgt aus 17.

19. Satz. Jeder Theil von $\mathfrak{G}(A, B, C\ldots)$ ist Gemeintheil von $A, B, C\ldots$

Der Beweis folgt aus 17, 7.

20. Satz. Ist jedes der Systeme $A, B, C\ldots$ Ganzes (3) von einem der Systeme $P, Q\ldots$, so ist

$$\mathfrak{G}(P, Q\ldots) \,\mathfrak{Z}\, \mathfrak{G}(A, B, C\ldots).$$

Beweis. Denn jedes Element von $\mathfrak{G}(P, Q\ldots)$ ist gemeinsames Element von $P, Q\ldots$, also auch gemeinsames Element von $A, B, C\ldots$, w. z. b. w.

Cambridge University Press
978-1-108-05038-8 - Was Sind und was Sollen die Zahlen?
Richard Dedekind
Excerpt
More information

§. 2.

Abbildung eines Systems.

21. Erklärung*). Unter einer Abbildung φ eines Systems S wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von s heißt und mit $\varphi(s)$ bezeichnet wird; wir sagen auch, daß $\varphi(s)$ dem Element s entspricht, daß $\varphi(s)$ durch die Abbildung φ aus s entsteht oder erzeugt wird, daß s durch die Abbildung φ in $\varphi(s)$ übergeht. Ist nun T irgend ein Theil von S, so ist in der Abbildung φ von S zugleich eine bestimmte Abbildung von T enthalten, welche der Einfachheit wegen wohl mit demselben Zeichen φ bezeichnet werden darf und darin besteht, daß jedem Elemente t des Systems T dasselbe Bild $\varphi(t)$ entspricht, welches t als Element von S besitzt; zugleich soll das System, welches aus allen Bildern $\varphi(t)$ besteht, das Bild von T heißen und mit $\varphi(T)$ bezeichnet werden, wodurch auch die Bedeutung von $\varphi(S)$ erklärt ist. Als ein Beispiel einer Abbildung eines Systems ist schon die Belegung seiner Elemente mit bestimmten Zeichen oder Namen anzusehen. Die einfachste Abbildung eines Systems ist diejenige, durch welche jedes seiner Elemente in sich selbst übergeht; sie soll die identische Abbildung des Systems heißen. Der Bequemlichkeit halber wollen wir in den folgenden Sätzen 22, 23, 24, die sich auf eine beliebige Abbildung φ eines beliebigen Systems S beziehen, die Bilder von Elementen s und Theilen T entsprechend durch s' und T' bezeichnen; außerdem setzen wir fest, daß kleine und große lateinische Buchstaben ohne Accent immer Elemente und Theile dieses Systems S bedeuten sollen.

---

*) Vergl. Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, dritte Auflage, 1879, §. 163.

22. Satz*). Ist $A \mathfrak{3} B$, so ist $A' \mathfrak{3} B'$.

Beweis. Denn jedes Element von A' ist das Bild eines in A, also auch in B enthaltenen Elementes und ist folglich Element von B', w. z. b. w.

23. Satz. Das Bild von $\mathfrak{M}(A, B, C\ldots)$ ist $\mathfrak{M}(A', B', C'\ldots)$.

Beweis. Bezeichnet man das System $\mathfrak{M}(A, B, C\ldots)$, welches nach 10 ebenfalls Theil von S ist, mit M, so ist jedes Element seines Bildes M' das Bild m' eines Elementes m von M; da nun m nach 8 auch Element von einem der Systeme $A, B, C\ldots$, und folglich m' Element von einem der Systeme $A', B', C'\ldots$, also nach 8 auch Element von $\mathfrak{M}(A', B', C'\ldots)$ ist, so ist nach 3

$$M' \mathfrak{3} \mathfrak{M}(A', B', C'\ldots).$$

Andererseits, da $A, B, C\ldots$ nach 9 Theile von M, also $A', B', C'\ldots$ nach 22 Theile von M' sind, so ist nach 10 auch

$$\mathfrak{M}(A', B', C'\ldots) \mathfrak{3} M',$$

und hieraus in Verbindung mit dem Obigen folgt nach 5 der zu beweisende Satz

$$M' = \mathfrak{M}(A', B', C'\ldots).$$

24. Satz**). Das Bild jedes Gemeintheils von $A, B, C\ldots$, also auch das der Gemeinheit $\mathfrak{G}(A, B, C\ldots)$ ist Theil von $\mathfrak{G}(A', B', C'\ldots)$.

Beweis. Denn dasselbe ist nach 22 Gemeintheil von $A', B', C'\ldots$, woraus der Satz nach 18 folgt.

25. Erklärung und Satz. Ist φ eine Abbildung eines Systems S, und ψ eine Abbildung des Bildes $S' = \varphi(S)$, so entspringt hieraus immer eine aus φ und ψ zusammengesetzte***) Abbildung θ von S, welche darin besteht, daß jedem Elemente s von S das Bild

$$\theta(s) = \psi(s') = \psi(\varphi(s))$$

*) Vergl. Satz 27. **) Vergl. Satz 29. ***) Eine Verwechselung dieser Zusammensetzung von Abbildungen mit derjenigen der Systeme von Elementen (8) ist wohl nicht zu befürchten.

entspricht, wo wieder $\varphi(s) = s'$ gesetzt ist. Diese Abbildung θ kann kurz durch das Symbol $\psi . \varphi$ oder $\psi\varphi$, das Bild $\theta(s)$ durch $\psi\varphi(s)$ bezeichnet werden, wobei auf die Stellung der Zeichen φ, ψ wohl zu achten ist, weil das Zeichen $\varphi\psi$ im Allgemeinen bedeutungslos ist und nur dann einen Sinn hat, wenn $\psi(S') \, 3 \, S$ ist. Bedeutet nun χ eine Abbildung des Systems $\psi(S') = \psi\varphi(S)$, und η die aus ψ und χ zusammengesetzte Abbildung $\chi\psi$ des Systems S', so ist $\chi\theta(s) = \chi\psi(s') = \eta(s') = \eta\varphi(s)$, also stimmen die zusammengesetzten Abbildungen $\chi\theta$ und $\eta\varphi$ für jedes Element s von S mit einander überein, d. h. es ist $\chi\theta = \eta\varphi$. Dieser Satz kann nach der Bedeutung von θ und η füglich durch

$$\chi . \psi\varphi = \chi\psi . \varphi$$

ausgedrückt, und diese aus φ, ψ, χ zusammengesetzte Abbildung kann kurz durch $\chi\psi\varphi$ bezeichnet werden.

§. 3.

Aehnlichkeit einer Abbildung. Aehnliche Systeme.

26. Erklärung. Eine Abbildung φ eines Systems S heißt ähnlich (oder deutlich), wenn verschiedenen Elementen a, b des Systems S stets verschiedene Bilder $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$ entsprechen. Da in diesem Falle umgekehrt aus $s' = t'$ stets $s = t$ folgt, so ist jedes Element des Systems $S' = \varphi(S)$ das Bild s' von einem einzigen, vollständig bestimmten Elemente s des Systems S, und man kann daher der Abbildung φ von S eine umgekehrte, etwa mit $\overline{\varphi}$ zu bezeichnende Abbildung des Systems S' gegenüberstellen, welche darin besteht, daß jedem Elemente s' von S' das Bild $\overline{\varphi}(s') = s$ entspricht, und offenbar ebenfalls ähnlich ist. Es leuchtet ein, daß $\overline{\varphi}(S') = S$, daß ferner φ die zu $\overline{\varphi}$ gehörige umgekehrte Abbildung, und daß die nach 25 aus φ und $\overline{\varphi}$ zusammengesetzte

Cambridge University Press
978-1-108-05038-8 - Was Sind und was Sollen die Zahlen?
Richard Dedekind
Excerpt
More information

Abbildung $\overline{\varphi}\,\varphi$ die identische Abbildung von S ist (21). Zugleich ergeben sich folgende Ergänzungen zu §. 2 unter Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen.

27. Satz*). Ist $A' \mathfrak{Z} B'$, so ist $A \mathfrak{Z} B$.

Beweis. Denn wenn a ein Element von A, so ist a' ein Element von A', also auch von B', mithin $= b'$, wo b ein Element von B; da aber aus $a' = b'$ immer $a = b$ folgt, so ist jedes Element a von A auch Element von B, w. z. b. w.

28. Satz. Ist $A' = B'$, so ist $A = B$.

Der Beweis folgt aus 27, 4, 5.

29. Satz**). Ist $G = \mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$, so ist

$$G' = \mathfrak{G}(A', B', C' \ldots).$$

Beweis. Jedes Element von $\mathfrak{G}(A', B', C' \ldots)$ ist jedenfalls in S' enthalten, also das Bild g' eines in S enthaltenen Elementes g; da aber g' gemeinsames Element von $A', B', C' \ldots$ ist, so muß g nach 27 gemeinsames Element von $A, B, C \ldots$, also auch Element von G sein; mithin ist jedes Element von $\mathfrak{G}(A', B', C' \ldots)$ Bild eines Elementes g von G, also Element von G', d. h. es ist $\mathfrak{G}(A', B', C' \ldots) \mathfrak{Z} G'$, und hieraus folgt unser Satz mit Rücksicht auf 24, 5.

30. Satz. Die identische Abbildung eines Systems ist immer eine ähnliche Abbildung.

31. Satz. Ist φ eine ähnliche Abbildung von S, und ψ eine ähnliche Abbildung von $\varphi(S)$, so ist die aus φ und ψ zusammengesetzte Abbildung $\psi\varphi$ von S ebenfalls eine ähnliche, und die zugehörige umgekehrte Abbildung $\overline{\psi\varphi}$ ist $= \overline{\varphi}\,\overline{\psi}$.

Beweis. Denn verschiedenen Elementen a, b von S entsprechen verschiedene Bilder $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$, und diesen wieder verschiedene Bilder $\psi(a') = \psi\varphi(a)$, $\psi(b') = \psi\varphi(b)$, also ist

---

*) Vergl. Satz 22. **) Vergl. Satz 24.

$\psi\varphi$ eine ähnliche Abbildung. Außerdem geht jedes Element $\psi\varphi(s) = \psi(s')$ des Systems $\psi\varphi(S)$ durch $\overline{\psi}$ in $s' = \varphi(s)$ und dieses durch $\overline{\varphi}$ in s über, also geht $\psi\varphi(s)$ durch $\overline{\varphi}\,\overline{\psi}$ in s über, w. z. b. w.

32. Erklärung. Die Systeme R, S heißen **ähnlich**, wenn es eine derartige ähnliche Abbildung φ von S giebt, daß $\varphi(S) = R$, also auch $\overline{\varphi}(R) = S$ wird. Offenbar ist nach 30 jedes System sich selbst ähnlich.

33. Satz. Sind R, S ähnliche Systeme, so ist jedes mit R ähnliche System Q auch mit S ähnlich.[1]

Beweis. Denn sind φ, ψ solche ähnliche Abbildungen von S, R, daß $\varphi(S) = R$, $\psi(R) = Q$ wird, so ist (nach 31) $\psi\varphi$ eine solche ähnliche Abbildung von S, daß $\psi\varphi(S) = Q$ wird, w. z. b. w.

34. Erklärung. Man kann daher alle Systeme in **Classen** eintheilen, indem man in eine bestimmte Classe alle und nur die Systeme $Q, R, S \ldots$ aufnimmt, welche einem bestimmten System R, dem **Repräsentanten** der Classe, ähnlich sind; nach dem vorhergehenden Satze 33 ändert sich die Classe nicht, wenn irgend ein anderes, ihr angehöriges System S als Repräsentant gewählt wird.

35. Satz. Sind R, S ähnliche Systeme, so ist jeder Theil von S auch einem Theile von R, jeder echte Theil von S auch einem echten Theile von R ähnlich.

Beweis. Denn wenn φ eine ähnliche Abbildung von S, $\varphi(S) = R$, und $T \,3\, S$ ist, so ist nach 22 das mit T ähnliche System $\varphi(T) \,3\, R$; ist ferner T echter Theil von S, und s ein nicht in T enthaltenes Element von S, so kann das in R enthaltene Element $\varphi(s)$ nach 27 nicht in $\varphi(T)$ enthalten sein; mithin ist $\varphi(T)$ echter Theil von R, w. z. b. w.