300.

NOTE RELATIVE AUX DROITES EN INVOLUTION DE M. SYLVESTER.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. LII. (*Janvier—Juin*, 1861), pp. 1039—1042.]

La courbe cubique dans l'espace, représentée par les équations

$$yu - z^2 = 0, \quad zy - xu = 0, \quad xz - y^2 = 0,$$

passe par le point A $(x = y = z = 0)$ et le point B $(y = z = u = 0)$; le plan $x = 0$ est le plan osculant en A, le plan $y = 0$ le plan par la tangente en A et la droite AB; le plan $z = 0$ celui par la droite AB et la tangente en B; et enfin le plan $u = 0$ est le plan osculant en B. Réciproquement, pour une courbe cubique quelconque, en prenant les points A, B, sur la courbe à volonté, et en fixant comme ci-dessus les significations des coordonnées x, y, z, u, les facteurs constants que contiennent implicitement ces valeurs étant convenablement déterminés, les équations de la courbe cubique seront

$$yu - z^2 = 0, \quad zy - xu = 0, \quad xz - y^2 = 0.$$

Par un point quelconque de l'espace il passe une droite qui coupe deux fois la courbe cubique; et en prenant (x_1, y_1, z_1, u_1) pour les coordonnées du point dont il s'agit, et en écrivant

$$p_1 = y_1u_1 - z_1^2, \quad q_1 = z_1y_1 - x_1u_1, \quad r_1 = x_1z_1 - y_1^2,$$

les équations de la droite seront

$$p_1x + q_1y + r_1z = 0, \quad p_1y + q_1z + r_1u = 0.$$

Or, en considérant en général une droite représentée par les équations

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta u = 0, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' u = 0,$$

les six quantités

$$\beta\gamma' - \beta'\gamma,\quad \gamma\alpha' - \gamma'\alpha,\quad \alpha\beta' - \alpha'\beta,\quad \alpha\delta' - \alpha'\delta,\quad \beta\delta' - \beta'\delta,\quad \gamma\delta' - \gamma'\delta,$$

sont ce que je nomme les coordonnées de la droite (en représentant par a, b, c, f, g, h ces coordonnées, on a l'équation identique $af + bg + ch = 0$, et les coordonnées d'une droite peuvent être des quantités quelconques qui satisfont à cette équation). La condition pour l'involution de six droites est celle-ci, savoir: le déterminant formé avec les coordonnées des six droites est égal à zéro.

Je reviens à la droite qui coupe deux fois la courbe cubique. En écrivant les équations sous la forme

$$p_1x + q_1y + r_1z + 0u = 0,\quad 0x + p_1y + q_1z + r_1u = 0,$$

les coordonnées de cette droite seront

$$p_1^2,\quad q_1^2 - p_1r_1,\quad -p_1q_1,\quad p_1r_1,\quad q_1r_1,\quad r_1^2,$$

savoir, ces coordonnées seront des fonctions linéaires de $(p_1^2,\ q_1^2,\ r_1^2,\ q_1r_1,\ r_1p_1,\ p_1q_1)$. Donc, en considérant six droites dont chacune coupe deux fois la courbe cubique, et en attribuant des significations analogues à $(p_2,\ q_2,\ r_2)$, etc., la condition pour l'involution des six droites se trouve en égalant à zéro le déterminant dont les lignes sont $(p_1^2,\ q_1^2,\ r_1^2,\ q_1r_1,\ r_1p_1,\ p_1q_1)$, $(p_2^2,\ q_2^2$, etc.), etc.; condition qui exprime que les six droites

$$p_1x + q_1y + r_1z = 0,$$

dans le plan $u = 0$ (ou si l'on veut les six droites $p_1y + q_1z + r_1u = 0$ dans le plan $x = 0$) touchent une même conique. Or la droite

$$p_1x + q_1y + r_1z = 0$$

est la projection de l'une des six droites sur le plan osculant $u = 0$, avec le point $x = y = z = 0$ de la courbe cubique comme centre de projection; et si, en prenant un plan osculant quelconque et un point quelconque de la courbe cubique pour plan et centre de projection, nous appelons tout simplement *projection* une telle projection d'une droite quelconque (le plan osculant et le point de la cubique étant toujours les mêmes), on est conduit au théorème que voici, savoir:

Six droites dont chacune coupe deux fois la même courbe cubique seront en involution, si les projections de ces droites touchent une même conique.

Et de même, pour un nombre quelconque de droites, si les projections touchent une même conique, ces droites seront en involution, c'est-à-dire six quelconques des droites seront des droites en involution.

Il convient de remarquer qu'en considérant six droites quelconques, on peut en général trouver une courbe cubique coupée deux fois par chacune des droites: la condition du théorème est donc, comme cela doit être, une seule relation entre les six droites. Je remarque aussi que cette relation ne dépend nullement du plan osculant ni du point de la courbe cubique choisis pour plan et centre de projection. Réciproquement, en prenant dans un plan osculant quelconque de la courbe cubique un nombre quelconque (six ou plus) de tangentes d'une même conique, et en reprojetant ces tangentes sur la courbe cubique au moyen d'un point quelconque de la courbe comme centre de projection (de manière à obtenir pour reprojection de chaque tangente une droite qui coupe deux fois la courbe cubique), on obtient un système de droites en involution. Le lieu des droites dont chacune coupe deux fois la courbe cubique, et qui sont en involution, est une surface réglée du quatrième ordre qui a la courbe cubique pour courbe double. En effet, si l'équation en coordonnées tangentielles de la conique enveloppée par les droites $p_1x + q_1y + r_1z = 0$, etc. (ou, si l'on veut, par les droites $p_1y + q_1z + r_1u = 0$, etc.), est

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h)\,(p,\ q,\ r)^2 = 0,$$

cette même équation, en y considérant p, q, r comme dénotant $yu - z^2$, $zy - xu$, $xz - y^2$, autrement dit, l'équation,

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h)\,(yu - z^2,\ zy - xu,\ xz - y^2)^2 = 0,$$

sera celle d'une surface du quatrième ordre ayant la courbe cubique pour courbe double. Et cette surface sera une surface réglée; car en menant par un point quelconque de la surface une droite qui coupe deux fois la courbe cubique, chaque point d'intersection avec la courbe cubique doit compter pour deux points d'intersection avec la surface, et la droite coupe la surface en cinq points, c'est-à-dire que cette droite est située entièrement dans la surface.

J'ai remarqué ailleurs (*Camb. and Dubl. Math. Journ.*, t. VII. (1852), p. 172, [107]) qu'il y a sur une surface réglée de l'ordre n une courbe double rencontrée par chaque génératrice en $(n-2)$ points. Cette courbe double sera de l'ordre $(n-2)$ au moins, et de l'ordre $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ au plus; donc, pour $n=4$, la courbe double sera de l'ordre 2 ou 3, et comme évidemment cette courbe n'est pas une courbe plane, elle sera: ou 1° deux droites qui ne se rencontrent pas; ou 2° une courbe cubique en espace. Cette seconde espèce des surfaces réglées du quatrième ordre est celle qui se présente dans la théorie des droites en involution.

301.

SUR LES CÔNES DU SECOND ORDRE QUI PASSENT PAR SIX POINTS DONNÉS.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. LII. (*Janvier—Juin*, 1861), pp. 1216—1218.]

DANS un Mémoire par feu M. Weddle "On the theorems in space analogous to those of Pascal and Brianchon in a plane" (*Camb. and Dubl. Math. Journ.*, t. V. 1850, voir la Note p. 69), on trouve à propos d'un théorème de M. Chasles la remarque que le lieu du sommet d'un cône du second ordre qui passe par six points donnés est une surface du quatrième ordre qui contient la courbe cubique en espace par les six points. Voici comment je démontre ce théorème:

En prenant (X, Y, Z, U) pour les coordonnées courantes, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)\ldots(\alpha_6, \beta_6, \gamma_6, \delta_6)$ pour les coordonnées des six points donnés, et (x, y, z, u) pour ceux du sommet, je pose l'équation

$$\begin{vmatrix} ., & X^2, & Y^2, & Z^2, & U^2, & YZ, & ZX, & XY, & XU, & YU, & ZU \\ \lambda & 2x & . & . & . & . & z & y & u & . & . \\ \mu & . & 2y & . & . & z & . & x & . & u & . \\ \nu & . & . & 2z & . & y & x & . & . & . & u \\ \rho & . & . & . & 2u & . & . & . & x & y & z \\ . & \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 & \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta & \alpha\delta & \beta\delta & \gamma\delta \end{vmatrix} = 0,$$

où la dernière ligne dénote les six lignes qu'on obtient en écrivant successivement $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)\ldots(\alpha_6, \beta_6, \gamma_6, \delta_6)$ au lieu de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, de manière que la fonction au côté gauche est un déterminant de l'ordre onze: les coefficients λ, μ, ν, ρ sont des quantités arbitraires et les points $(\cdot)$ dénotent des zéros.

Cette équation est évidemment celle d'une surface du second ordre qui passe par les six points, et il ne faut qu'une seule condition pour que cette surface soit un cône: la condition sera

$$\begin{vmatrix} 2x, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & z, & y, & u, & \cdot, & \cdot \\ \cdot & 2y & \cdot & \cdot & z & \cdot & x & \cdot & u & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2z & \cdot & y & x & \cdot & \cdot & \cdot & u \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2u & \cdot & \cdot & \cdot & x & y & z \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 & \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta & \alpha\delta & \beta\delta & \gamma\delta \end{vmatrix} = 0,$$

où la fonction à côté gauche est de même un déterminant de l'ordre dix; cette équation, laquelle est de l'ordre quatre par rapport à (x, y, z, u), sera celle du lieu du sommet.

En effet, pour que la surface du second ordre soit un cône ayant pour sommet le point (x, y, z, u), il faut et il suffit que les équations dérivées par rapport à chacune des coordonnées (X, Y, Z, U), soient satisfaites en y écrivant (x, y, z, u) au lieu de (X, Y, Z, U). Je forme l'équation dérivée par rapport à X, et j'y écris (x, y, z, u) au lieu de (X, Y, Z, U); l'équation est

$$\begin{vmatrix} \cdot, & 2x, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & z, & y, & u, & \cdot, & \cdot \\ \lambda & 2x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z & y & u & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & & & & & & & & \end{vmatrix} = 0.$$

Or on ne change pas la valeur du déterminant en substituant pour la première ligne cette même ligne moins la seconde ligne; l'équation devient ainsi:

$$\begin{vmatrix} -\lambda, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot \\ \lambda & 2x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z & y & u & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & & & & & & & & \end{vmatrix} = 0;$$

et le déterminant se réduit à $-\lambda$ multiplié par le déterminant de l'ordre dix; donc, en supposant que ce dernier déterminant se réduise à zéro, l'équation dérivée par rapport à X sera satisfaite; et de même, les équations dérivées par rapport à Y, Z, U, en substituant toujours (x, y, z, u) au lieu de (X, Y, Z, U), seront toutes satisfaites si le déterminant de l'ordre dix se réduit à zéro. C. Q. F. D.

Il convient de remarquer que l'on peut sans perte de généralité réduire à zéro trois quelconques des quantités λ, μ, ν, ρ; de là on obtient l'équation du cône en substituant, au lieu de l'une quelconque des premières quatre lignes du déterminant de l'ordre dix, la ligne

$$| X^2, Y^2, Z^2, U^2, YZ, ZX, XY, XU, YU, ZU |.$$

En considérant la courbe cubique par les six points, on peut supposer que les équations de cette courbe soient

$$yu - z^2 = 0, \quad zy - xu = 0, \quad xz - y^2 = 0;$$

cela étant, on aura

$$\beta\delta - \gamma^2 = 0, \quad \beta\gamma - \alpha\delta = 0, \quad \alpha\gamma - \beta^2 = 0$$

pour l'un quelconque des points $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1), \ldots (\alpha_6, \beta_6, \gamma_6, \delta_6)$; et de là, au moyen des propriétés des déterminants, et en écrivant

$$\square = 4(yu - z^2)(xz - y^2) - (zy - xu)^2,$$

on exprime l'équation de la surface comme fonction linéaire par rapport à x, y, z, u et par rapport à $d_x\square$, $d_y\square$, $d_z\square$, $d_u\square$; ces dernières fonctions se réduisent à zéro en vertu des équations

$$yu - z^2 = 0, \quad zy - xu = 0, \quad xz - y^2 = 0,$$

et ainsi, comme cela doit être, la surface passe par la courbe cubique.

Je prends l'occasion de remarquer que le théorème que j'ai donné par rapport aux six droites en involution de M. Sylvester [300], peut s'exprimer dans une forme encore plus simple comme suit:

Soit donnée une courbe cubique en espace, et prenons un point quelconque de la courbe pour sommet d'un cône du second ordre, d'ailleurs arbitraire; un plan tangent du cône rencontre la courbe en deux points, et par ces deux points on peut mener une droite: les droites qui correspondent de cette manière à six plans tangents quelconques du cône sont des droites en involution. Je dois remarquer que l'idée de rattacher ces droites à une surface du quatrième ordre est due à M. Sylvester.

A propos de ce sujet, j'ai considéré le problème de trouver le lieu du sommet d'un cône du second ordre qui touche à six droites données: ce lieu est une surface du huitième ordre; et en représentant les coordonnées de l'une quelconque des droites par (a, b, c, f, g, h), savoir les coordonnées de la première droite, etc., sont

$$(a_1, b_1, c_1, f_1, g_1, h_1), \ldots (a_6, b_6, c_6, f_6, g_6, h_6),$$

les coefficients de l'équation seront des fonctions linéaires des déterminants du sixième ordre formés au moyen de la matrice $(a, b, c, f, g, h)^2$, à six lignes et vingt et une colonnes.

302.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES COURBES EN ESPACE.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. LIV. (*Janvier—Juin*, 1862), pp. 55—60, 396—400, 672—678.]

SOIT une courbe donnée du $m^{ième}$ ordre; je suppose toujours que cette courbe soit une courbe propre, savoir qu'elle n'est pas composée de courbes d'ordres inférieurs. Si nous prenons pour sommet d'un cône qui passe par la courbe un point A *quelconque* qui n'est pas sur la courbe, ce cône sera de l'ordre m; cela est vrai *en général* quelle que soit la courbe; seulement si m est un nombre composé, alors pour de certaines courbes il peut y avoir des positions de A pour lesquelles le cône sera d'un ordre sous-multiple de m; mais en faisant abstraction de ces positions particulières, le cône sera de l'ordre m. Et, cela étant, une droite du cône ne contiendra en général qu'un seul point de la courbe. En employant quatre coordonnées (x, y, z, w) et en supposant qu'au point A on ait

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0,$$

l'équation du cône sera $U=0$, où U est une fonction homogène de (x, y, z) de l'ordre m. On peut faire passer par la courbe une surface ayant pour équation

$$Qw-P=0$$

$\left(\text{ou } w=\dfrac{P}{Q}\right)$, où P, Q sont des fonctions homogènes de (x, y, z) des ordres p, $p-1$ respectivement. Et on peut supposer que p soit égal tout au plus à $m-1$: en effet, en prenant $p=m-1$, l'équation contiendrait

$$\tfrac{1}{2}(m-1)m+\tfrac{1}{2}m(m+1)-1,$$

c'est-à-dire m^2-1 constantes arbitraires; et en déterminant convenablement m^2-m+1 de ces quantités, la surface de l'ordre $m-1$ passera par m^2-m+1 points de la courbe de l'ordre m, c'est-à-dire cette surface contiendra la courbe entière. De cette manière, on obtiendrait toujours une surface de l'ordre $m-1$; mais si les fonctions P, Q

ainsi trouvées avaient un facteur commun, ce facteur devrait être écarté; il convient donc de supposer que les degrés de P, Q soient p, $p-1$ respectivement, p étant tout au plus égal à $m-1$. La surface $Qw-P=0$ a au point A un point conique du $(p-1)^{ième}$ ordre; en effet dans le voisinage de ce point l'équation se réduit à $Q=0$, laquelle appartient à un cône du $(p-1)^{ième}$ ordre. J'ajoute que la surface contient les $p(p-1)$ droites $P=0$, $Q=0$ qui passent chacune par le point A; toute autre droite par ce point rencontre la surface dans ce point (lequel compte pour $p-1$ points d'intersection) et encore dans un seul point donné par l'équation

$$w=\frac{P}{Q}.$$

On peut appeler *monoïde* une telle surface; le point A sera le sommet; le cône $P=0$ le cône supérieur; le cône $Q=0$, le cône inférieur; les droites d'intersection de ces deux cônes, les droites de la monoïde.

Or le cône circonscrit $U=0$ et la monoïde $Qw-P=0$ se coupent selon une courbe de l'ordre mp: si $p=1$, cette intersection des deux surfaces sera la courbe du $m^{ième}$ ordre, laquelle sera une courbe plane; mais, dans tout autre cas, la courbe d'intersection sera composée de la courbe du $m^{ième}$ ordre, et d'un autre système de l'ordre $m(p-1)$; ce système ne peut être autre chose que les droites d'intersection du cône circonscrit $U=0$, et du cône inférieur $Q=0$ de la monoïde; c'est-à-dire les équations

$$U=0, \quad Q=0$$

doivent donner $P=0$; car, cela étant, les droites $U=0$, $Q=0$ seront situées sur la monoïde; et ces droites, lesquelles forment un système de l'ordre $m(p-1)$, seront partie de l'intersection de la monoïde et du cône circonscrit $U=0$. Et il est nécessaire que cela soit ainsi, car autrement chaque droite du cône $U=0$ ne contiendrait sur la monoïde que le point A, et le point déterminé par l'équation $w=\dfrac{P}{Q}$, lequel est un point sur la courbe du $m^{ième}$ ordre; donc cette autre partie de l'intersection de la monoïde et du cône $U=0$ serait, non pas une courbe quelconque, mais le seul point A; ce qui est absurde.

Le cône circonscrit $U=0$ ne peut pas être un cône quelconque à moins que $p=1$; en effet si $p>1$, il est nécessaire que le cône ait au moins $(p-1)m$ droites doubles (en comprenant dans cette locution le cas où le cône a des singularités qui équivalent à $(p-1)m$ droites doubles), car en supposant pour un moment que le cône $U=0$ n'ait pas de singularités, le cône $P=0$ de l'ordre p devrait passer par les $(p-1)m$ droites d'intersection du cône $Q=0$ de l'ordre $(p-1)$ et du cône $U=0$ de l'ordre m; or m est au moins égal à $p+1$, de manière que le cône $P=0$ doit passer au moins par (p^2-1) droites du cône $Q=0$; mais p^2-1 est $>p^2-p$, à moins que $p=1$; donc ce cône $P=0$ serait composé du cône $Q=0$ et d'un plan $P'=0$ par le point A; c'est-à-dire $P=QP'$, et l'équation de la monoïde se réduirait à $w=P'$, ou l'on aurait $p=1$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On obtiendra le même résultat à moins de supposer que le cône $Q=0$ passe par un certain nombre x de droites doubles du cône $U=0$; mais en faisant cette supposition, chacune de ces droites compte pour deux intersections des cônes $Q=0$, $U=0$; il y a encore $(p-1)m-2x$ droites d'intersection; et les $x+\{(p-1)m-2x\}$, c'est-à-dire $(p-1)m-x$ droites peuvent être comprises parmi les $p(p-1)$ droites de la monoïde si x est égal au moins à $(p-1)(m-p)$; c'est-à-dire le cône $U=0$ doit avoir au moins ce nombre de droites doubles. Je remarque que pour m impair, et $p=\frac{1}{2}(m+1)$, le nombre sera $\frac{1}{4}(m^2-2m+1)$, et pour m pair, et $p=\frac{1}{2}m$ ou $\frac{1}{2}m+1$, le nombre sera $\frac{1}{4}(m^2-2m)$; mais pour toute autre valeur de p, le nombre sera moins élevé.

Je résume comme suit:

Toute courbe du $m^{ième}$ ordre est l'intersection d'un cône circonscrit $U=0$, du $m^{ième}$ ordre, et d'une surface monoïde $Qw-P$, de l'ordre $p=m-1$ au plus. L'intersection complète de deux surfaces est composée de la courbe du $m^{ième}$ ordre et des $m(p-1)$ droites d'intersection du cône circonscrit $U=0$, et du cône inférieur $Q=0$ de la monoïde. Ces droites seront $(p-1)(m-p)+\alpha$ droites, chacune répétée deux fois, et $(p-1)(2p-m)-2\alpha$ droites, où α peut être égal à zéro; chacune des $(p-1)(m-p)+\alpha$ droites sera une droite double du cône $U=0$; et les $(p-1)(m-p)+\alpha$ droites et $(p-1)(2p-m)-2\alpha$ droites, ensemble $p(p-1)-\alpha$ droites, seront situées sur le cône supérieur $P=0$ de la monoïde.

Il y a deux circonstances qui empêchent que cette théorie ne conduise tout de suite à une classification des courbes en espace. D'abord, une droite double du cône $U=0$ peut correspondre ou à un point double réel, ou à un point double apparent de la courbe; et de même en supposant que la droite double devienne une droite de rebroussement, cette droite peut ou correspondre à un point de rebroussement (point stationnaire) de la courbe, ou la droite peut être une tangente ordinaire de la courbe, sans qu'il ait sur la courbe aucune singularité qui corresponde à cette droite de rebroussement (voir le Mémoire de M. Salmon: "On the classification of curves of double curvature," *Camb. et Dubl. Math. Journ.*, t. v. pp. 23—46, 1850).

Puis, étant donnée l'équation $U=0$ du cône circonscrit, la monoïde n'est pas une surface déterminée, et il n'est guère facile de voir quel doit être l'ordre de cette surface. En effet, cette équation étant $w=\frac{P}{Q}$, il peut y avoir des fonctions P', Q' telles que $PQ'-P'Q=MU$, et, cela étant, puisqu'il ne s'agit que de l'intersection avec le cône $U=0$, on pourrait remplacer l'équation $w=\frac{P}{Q}$ par celle-ci, $w=\frac{P'}{Q'}$, laquelle peut être d'un ordre inférieur.

Ces difficultés se présentent dès le commencement. En effet soit $m=3$. On a $p=1$ ou $p=2$, mais $p=1$ ne donne que la cubique plane; je suppose donc $p=2$. Le cône $U=0$ du troisième ordre aura une droite double, laquelle peut être une droite de rebroussement. L'équation de la monoïde sera $w=\frac{P}{Q}$, où $Q=0$ est l'équation d'un plan qui passe par le point double ou de rebroussement, et qui coupe ainsi le cône $U=0$ selon une autre droite; et $Qw-P=0$ est l'équation d'un cône du second ordre qui passe par ces deux droites. Mais soit que le cône $U=0$ ait une droite double, soit que cette droite soit de rebroussement, on n'obtient qu'une seule espèce de courbe cubique; au premier cas le sommet n'est pas situé, au deuxième cas ce sommet est situé, sur une tangente de la courbe cubique; voilà toute la différence.

Soit encore $m=4$; on peut avoir $p=1$, 2 ou 3; mais $p=1$ ne donne que les courbes planes du quatrième ordre, je suppose donc $p=2$ ou $p=3$; dans l'un ou l'autre cas, le cône $U=0$ du quatrième ordre doit avoir au moins deux droites doubles. Il peut donc y avoir seulement deux droites doubles; l'une de ces droites peut être une droite de rebroussement, ou toutes les deux peuvent être de telles droites. Ou encore, il peut y avoir trois droites doubles; l'une de ces droites peut être une droite de rebroussement, ou deux droites ou toutes les trois peuvent être de telles droites. Il y a donc un assez grand nombre de cas à considérer; mais on sait qu'il n'y a que quatre espèces en tout, savoir: 1° la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre qui ne se touchent pas, courbe que je nomme *quadriquadrique générale;* 2° les deux surfaces du second ordre peuvent se toucher; la courbe d'intersection sera une *quartique nodale;* 3° les deux surfaces peuvent avoir un contact singulier, la courbe d'intersection sera une *quartique cuspidale;* 4° il y a enfin la courbe du quatrième ordre qui n'est située que sur une seule surface du second ordre, et que l'on n'obtient qu'au moyen d'une surface du troisième ordre: ce sera la courbe *excubo-quartique.* Je remarque en passant que les quartiques nodale et cuspidale sont des sous-espèces tant de l'excubo-quartique que de la quadriquadrique. En supposant que le cône $U=0$ n'ait que deux droites doubles ou de rebroussement, et soit que $p=2$ ou $p=3$, on obtiendra par la théorie actuelle la quadriquadrique générale (cela est évident par les formules du Mémoire cité de M. Salmon). Si le cône $U=0$ a trois droites doubles ou de rebroussement, alors soit que $p=2$ ou $p=3$, on obtiendra, selon les circonstances, ou l'excubo-quartique, ou la quartique nodale, ou la quartique cuspidale (mais non pas cette dernière, à moins qu'il n'y ait au moins une droite de rebroussement). Mais il faudrait pour tout cela une discussion plus approfondie.

Je remarque qu'en prenant le point A sur la courbe du $m^{ième}$ ordre, l'on aurait eu, au lieu du cône $U=0$ du $m^{ième}$ ordre, un cône du $(m-1)^{ième}$ ordre, et l'ordre du cône se réduirait encore si le point A était un point multiple de la courbe. Peut-être il conviendrait de considérer de tels cônes au lieu du cône du $m^{ième}$ ordre.

En conclusion, je fais les réflexions que voici, savoir: Si $S=0$, $T=0$ sont des surfaces quelconques qui passent par la courbe du $m^{ième}$ ordre, alors en éliminant entre ces équations la coordonnée w, on obtient une équation

$$\Pi = UV = 0,$$

qui contient comme facteur l'équation $U=0$ du cône du $m^{ième}$ ordre. Mais il y a plus: la théorie de l'élimination entre deux équations algébriques fait voir que les équations