# 223.

## NOTE SUR UN THÉORÈME GÉNÉRAL PAR RAPPORT À L'ÉLIMINATION.

[From the *Annali di Scienze Mathematiche e Fisiche* (Tortolini), vol. VII. (1856), pp. 454—458.]

SOIENT

$$\phi = (a, b, c \ldots)(x, y)^n = 0,$$
$$\psi = (\alpha, \beta, \gamma \ldots)(x, y)^n = 0,$$

deux équations homogènes quelconques entre les variables $x$, $y$, et représentons par $R$ la résultante des deux fonctions $\phi$, $\psi$, de manière que $R=0$ sera la condition pour que les deux équations $\psi=0$, $\phi=0$ puissent avoir lieu. On sait depuis longtemps que les valeurs des variables $x$, $y$, qui satisfont à la fois aux deux équations $\psi=0$, $\phi=0$ sont données [1] par les conditions (équivalentes à une seule condition)

$$\frac{dR}{da} : \frac{dR}{db} : \frac{dR}{dc} : \text{etc.} = x^m : mx^{m-1}y : \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}y^2 : \text{etc.}$$
$$\frac{dR}{d\alpha} : \frac{dR}{d\beta} : \frac{dR}{d\gamma} : \text{etc.} = x^n : nx^{n-1}y : \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2 : \text{etc.};$$

ce qui suppose cependant que les coefficients $a, b, c, \ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots$, sont des quantités absolument arbitraires: les conditions dont il s'agit peuvent aussi s'écrire sous la forme

$$\frac{dR}{da} : \frac{dR}{db} : \frac{dR}{dc} : \text{etc.} = \frac{d\phi}{da} : \frac{d\phi}{db} : \frac{d\phi}{dc} : \text{etc.}$$
$$\frac{dR}{d\alpha} : \frac{dR}{d\beta} : \frac{dR}{d\gamma} : \text{etc.} = \frac{d\psi}{d\alpha} : \frac{d\psi}{d\beta} : \frac{d\psi}{d\gamma} : \text{etc.}$$

[1] Il va sans dire que ce n'est que la valeur de $x : y$ laquelle est déterminée; mais dans la théorie des fonctions homogènes les valeurs absolues n'importent rien, et on peut dire que les valeurs $x$, $y$ sont déterminées, quand $x : y$ est déterminée: on évite par cette locution des longueurs très-ennuyantes.

Or M. Schläfli dans son excellent mémoire "Ueber die Resultante eines Systemes mehrerer algebraïscher Gleichungen," *Trans. de l'Acad. de Vienne*, tom. IV. (1852), a généralisé ce théorème de la manière que voici. En considérant un nombre quelconque d'équations $\psi=0$, $\phi=0$, $\chi=0,\ldots$ entre le même nombre de variables $x=0$, $y=0$, $z=0,\ldots$ et en supposant que $a$, $b$, $c$, etc. soient des quantités qui entrent d'une manière quelconque dans la fonction $\phi$, sans entrer dans les autres fonctions $\psi$, $\chi$, etc. (il n'est nullement nécessaire que le nombre des quantités $a$, $b$, $c\ldots$ soit tel que la fonction $\phi$ reste absolument arbitraire, le nombre des quantités $a$, $b$, $c$, etc. peut même se réduire à 2) M. Schläfli fait voir que l'on a dans ce cas

$$\frac{dR}{da}:\frac{dR}{db}:\frac{dR}{dc}:\text{etc.}=\frac{d\phi}{da}:\frac{d\phi}{db}:\frac{d\phi}{dc}:\text{etc.}$$

Voici en effet le raisonnement fort simple dont se sert M. Schläfli pour établir la proposition dont il s'agit. Les équations $\psi=0$, $\phi=0$, $\chi=0$, etc. seront satisfaites par de certaines valeurs de $x:y:z$, etc. en supposant seulement que les quantités, $a$, $b$, $c$, etc. satisfont à la condition $R=0$. Donc les équations $\psi=0$ $\phi=0$, $\chi=0$, etc. seront encore satisfaites en donnant des variations infiniment petites quelconques $\delta a$, $\delta b$, $\delta c$, etc. aux quantités $a$, $b$, $c$, etc. en supposant seulement que ces variations soient telles que l'on ait

$$\delta R=\frac{dR}{da}\delta a+\frac{dR}{db}\delta b+\frac{dR}{dc}\delta c+\text{etc.}=0.$$

Or les équations $\psi=0$, $\chi=0$, etc. qui ne contiennent pas les quantités $a$, $b$, $c$, etc. suffisent seules (c'est-à-dire sans l'aide de l'équation $\phi=0$) à déterminer les valeurs de $x:y:z$, etc. qui satisfont au système $\phi=0$, $\psi=0$, $\chi=0$, (on suppose toujours l'équation $R=0$): donc les nouvelles valeurs de $x:y:z$, etc. seront les mêmes qu'auparavant, et l'on doit avoir

$$\delta\phi=\frac{d\phi}{da}\delta a+\frac{d\phi}{db}\delta b+\frac{d\phi}{dc}\delta c+\text{etc.}=0\,;$$

savoir cette équation aura lieu en vertu de l'équation $\delta R=0$ qui est la seule condition à laquelle on a assujetti les variations $\delta a$, $\delta b$, $\delta c$, etc., ce qui donne évidemment les conditions

$$\frac{dR}{da}:\frac{dR}{db}:\frac{dR}{dc}:\text{etc.}=\frac{d\phi}{da}:\frac{d\phi}{db}:\frac{d\phi}{dc}:\text{etc.}$$

Cela étant, on peut encore généraliser le théorème de M. Schläfli: pour cela je suppose que les quantités $a$, $b$, $c,\ldots$ entrent d'une manière quelconque dans les fonctions $\phi$, $\psi$, $\chi$, etc. Les équations $\phi=0$, $\psi=0$, $\chi=0$, etc. impliquent l'équation $R=0$, et en donnant aux quantités $a$, $b$, $c$, etc. des variations infiniment petites quelconques $\delta a$, $\delta b$, $\delta c$, etc. qui satisfont à la condition $\delta R=0$, les équations $\phi=0$, $\psi=0$, $\chi=0$, etc. seront satisfaites à la fois, cependant par des nouvelles valeurs des variables;

on peut représenter par $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, etc. les variations qu'il faut attribuer aux variables $x$, $y$, $z$, etc. Les équations $\phi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$, etc. seront satisfaites en y variant à la fois les valeurs des variables $x$, $y$, $z$, etc. et des quantités $a$, $b$, $c$, etc.; les variations de $\phi$, $\psi$, $\chi$, etc. doivent donc s'évanouir: je représente de la manière que voici les conditions ainsi obtenues, savoir

$$\begin{aligned}
&\delta\phi + \frac{d\phi}{dx}\,\delta x + \frac{d\phi}{dy}\,\delta y + \frac{d\phi}{dz}\,\delta z + \text{etc.} = 0,\\
&\delta\psi + \frac{d\psi}{dx}\,\delta x + \frac{d\psi}{dy}\,\delta y + \frac{d\psi}{dz}\,\delta z + \text{etc.} = 0,\\
&\delta\chi + \frac{d\chi}{dx}\,\delta x + \frac{d\chi}{dy}\,\delta y + \frac{d\chi}{dz}\,\delta z + \text{etc.} = 0.\\
&\quad\text{etc.}
\end{aligned}$$

En prenant $L$, $M$, $N$, etc. des fonctions absolument arbitraires, et en prenant aussi

$$\delta u = - L\delta x - M\delta y - N\delta z - \text{etc.}$$

on aura l'équation identique

$$\delta u + L\delta x + M\delta y + N\delta z + \text{etc.} = 0,$$

et en éliminant les variations $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, etc. on obtient une équation $\square = 0$; la partie de $\square$ qui contient le terme $\delta u$ sera évidemment

$$\delta u \begin{vmatrix} \frac{d\phi}{dx}, & \frac{d\phi}{dy}, & \frac{d\phi}{dz}, \dots \\ \frac{d\psi}{dx}, & \frac{d\psi}{dy}, & \frac{d\psi}{dz}, \\ \frac{d\chi}{dx}, & \frac{d\chi}{dy}, & \frac{d\chi}{dz}, \end{vmatrix}$$

et le déterminant, facteur de cette expression, s'évanouit en vertu des équations $\phi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$, etc. Cela est en effet un théorème de M. Hesse, lequel se démontre tout de suite en remarquant que l'on a

$$m\phi = x\frac{d\phi}{dx} + y\frac{d\phi}{dy} + z\frac{d\phi}{dz} + \text{etc.} = 0,$$
$$\text{etc.}$$

L'expression $\square$ ne contient donc pas de terme avec $\delta u$, et l'équation $\square = 0$, peut s'écrire comme suit:

$$\begin{vmatrix} & L, & M, & N, \dots \\ \delta\phi, & \frac{d\phi}{dx}, & \frac{d\phi}{dy}, & \frac{d\phi}{dz}, \\ \delta\psi, & \frac{d\psi}{dx}, & \frac{d\psi}{dy}, & \frac{d\psi}{dz}, \\ \delta\chi, & \frac{d\chi}{dx}, & \frac{d\chi}{dy}, & \frac{d\chi}{dz}, \end{vmatrix} = 0$$

équation de la forme

$$X\delta\phi + Y\delta\psi + Z\delta\chi + \text{etc.} = 0$$

c'est-à-dire une équation entre les seules variations $\delta a$, $\delta b$, $\delta c$, etc. Or il ne peut pas y avoir entre ces variations d'autre équation que $\delta R = 0$, on doit donc avoir identiquement

$$X\delta\phi + Y\delta\psi + Z\delta\chi + \text{etc.} = k\delta R,$$

savoir cette équation sera satisfaite par les valeurs de $x : y : z$, etc. qui satisfont à $\phi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$, etc. C'est là le théorème qu'il s'agissait de démontrer; en supposant que les quantités $a$, $b$, $c$, etc. n'entrent que dans la fonction $\phi$, on a $\delta\psi = 0$, $\delta\chi = 0$, etc., c'est-à-dire $X\delta\phi = k\delta R$, lequel est le théorème de M. Schläfli.

Je remarque que M. Schläfli a donné aussi un théorème par rapport au discriminant d'une fonction quelconque $\phi$; savoir, en représentant par $\nabla$ ce discriminant, et en supposant que les quantités $a$, $b$, $c$, etc. entrent d'une manière quelconque dans la fonction $\phi$, les valeurs de $x$, $y$... qui satisfont aux équations

$$\frac{d\phi}{dx} = 0, \quad \frac{d\phi}{dy} = 0, \quad \frac{d\phi}{dz} = 0, \text{ etc.}$$

(lesquelles impliquent l'équation $\nabla = 0$) sont données par

$$\frac{d\nabla}{da} : \frac{d\nabla}{db} : \frac{d\nabla}{dc} : \text{etc.} = \frac{d\phi}{da} : \frac{d\phi}{db} : \frac{d\phi}{dc} : \text{etc.};$$

cela est déjà la forme la plus générale du théorème.

London, 2, *Stone Buildings*, 12 *Dec.* 1856.

# 224.

## SUR UN THÉORÈME D'ABEL. NOTE.

[From the *Annali di Scienze Mathematiche e Fisiche* (Tortolini), vol. VIII. (1857), pp. 201—203.]

Il y a un petit mémoire d'Abel qui porte le titre "Ueber die Functionen welche der Gleichung $\phi(x) + \phi(y) = \psi(xf(y) + yf(x))$ genugthun" (*Crelle*, tom. II. (1827), pp. 386—394). La solution du problème est contenue dans les équations que voici, savoir $f(x)$ est une fonction définie par l'équation

$$\alpha^{2n} = (f(x) - nx)^{n+\alpha'} (f(x) + nx)^{n-\alpha'},$$

et on a alors

$$\phi(x) = \frac{1}{n+\alpha'} \log C (f(x) + nx),$$

et (en réduisant un peu l'expression donné dans le mémoire)

$$\psi(x) = \frac{1}{n+\alpha'} \log C^2\alpha \left(f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \frac{nx}{\alpha}\right).$$

On a aussi pour $\phi(x)$ cette autre expression en forme d'intégrale indéfinie,

$$\phi(x) = \int \frac{dx}{f(x) + \alpha' x};$$

car le facteur $a\alpha$ par lequel dans le mémoire l'expression à côté droit est multiplié se réduit (comme on voit sans peine) à l'unité. En comparant les deux expressions de $\phi(x)$, on voit qu'il est permis de prendre l'intégrale depuis $x = 0$, pourvu qu'on écrive $c = 1$; cela donne

$$\int_0 \frac{dx}{f(x) + \alpha' x} = \frac{1}{n+\alpha'} \log (f(x) + nx),$$

formule très simple pour l'intégration d'une expression algébrique laquelle ne peut pas s'exprimer à moyen de radicales.

On obtient une autre propriété de cette fonction $f(x)$ en substituant les valeurs des fonctions $\phi$ et $\psi$ dans l'équation originale

$$\phi(x) + \phi(y) = \psi\big(xf(y) + yf(x)\big);$$

cela donne d'abord

$$\frac{1}{n+\alpha'} \log C^2 \big(f(x) + nx\big)\big(f(x) - nx\big) = \frac{1}{n+\alpha'} \log C^2 \alpha \left[ f\left(\frac{xf(y) + yf(x)}{\alpha}\right) + \frac{n\,(xf(y) + yf(x))}{\alpha} \right]$$

et de là en réduisant on obtient l'équation fonctionnelle très simple

$$f(x)f(y) + n^2 xy = \alpha f\left(\frac{xf(y) - yf(x)}{\alpha}\right).$$

Je remarque que l'on peut sans perte de généralité écrire $\alpha = 1$, et $n = 1$: je mets $\beta$ au lieu de $\alpha'$, et j'écris aussi pour plus de simplicité $f(x) = X$, $f(y) = Y$. On a alors pour déterminer la fonction $X\,\big(= f(x)\big)$, l'équation

$$(X - x)^{1+\beta}(X + x)^{1-\beta} = 1$$

équation dans laquelle on pourrait remplacer les exposants $1+\beta$, $1-\beta$ par deux quantités quelconques.

La formule d'intégration devient

$$\int_0 \frac{dx}{X + \beta x} = \frac{1}{1+\beta} \log(X + x) = -\frac{1}{1-\beta} \log(X - x)$$

formule que l'on peut vérifier sans peine à moyen de celle-ci,

$$(X + \beta x)\,X' = x + \beta X,$$

que l'on obtient en différentiant l'équation pour $X$. L'équation fonctionnelle sera

$$XY + xy = f(xY + yX),$$

c'est-à-dire en écrivant $xY + yX = z$, $XY + xy = Z$ on doit avoir

$$(Z - z)^{1+\beta}(Z + z)^{1-\beta} = 1$$

et cela se vérifie tout de suite à moyen des équations

$$Z - z = (X - x)(Y - y), \quad Z + z = (X + x)(Y + y).$$

Je remarque aussi qu'en prenant le quotient des dérivées de cette équation par rapport à $x$ et $y$ on obtient

$$\frac{X' - Y'}{X'Y' - 1} = \left(\frac{X}{x} - \frac{Y}{y}\right) \div \left(\frac{X}{x} \cdot \frac{Y}{y} - 1\right),$$

laquelle est une propriété de la fonction $X$ et sa dérivée $X'$.

Londres, 17 *Juillet*, 1857.

# 225.

## ON A CLASS OF DYNAMICAL PROBLEMS.

[From the *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. VIII. (1857), pp. 506—511.]

THERE are a class of dynamical problems which, so far as I am aware, have not been considered in a general manner. The problems referred to (which might be designated as continuous-impact problems) are those in which the system is continually taking into connexion with itself particles of infinitesimal mass (i.e. of a mass containing the increment of time $dt$ as a factor), so as not itself to undergo any abrupt change of velocity, but to subject to abrupt changes of velocity the particles so taken into connexion. For instance, a problem of the sort arises when a portion of a heavy chain hangs over the edge of a table, the remainder of the chain being coiled or heaped up close to the edge of the table; the part hanging over constitutes the moving system, and in each element of time $dt$, the system takes into connexion with itself, and sets in motion with a finite velocity, an infinitesimal length $ds$ of the chain; in fact, if $v$ be the velocity of the part which hangs over, then the length $vdt$ is set in motion with the finite velocity $v$. The general equation of dynamics applied to the case in hand will be

$$\Sigma\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right\}dm+\Sigma\left(\Delta u\delta\xi+\Delta v\delta\eta+\Delta w\delta\zeta\right)\frac{1}{dt}d\mu=0,$$

where the first term requires no explanation: in the second term $\xi$, $\eta$, $\zeta$ denote the coordinates at the time $t$ of the particle $d\mu$ which then comes into connexion with the system; $\Delta u$, $\Delta v$, $\Delta w$ are the finite increments of velocity (or, if the particle is originally at rest, then the finite velocities) of the particle $d\mu$ the instant that it has come into connexion with the system; $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ are the virtual velocities of the same particle $d\mu$ considered as having come into connexion with and forming part of the system. The summation extends to the several particles or to the system of particles $d\mu$ which come into connexion with the system at the time $t$; of course, if there is only a single particle $d\mu$, the summatory sign $\Sigma$ is to be omitted. The values of

$\Delta u$, $\Delta v$, $\Delta w$ are $\frac{d\xi}{dt}-u$, $\frac{d\eta}{dt}-v$, $\frac{d\zeta}{dt}-w$, if by $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ we understand the velocities of $d\mu$ parallel to the axes, after it has come into connexion with the system; but it is to be observed, that considering $\xi$, $\eta$, $\zeta$ as the coordinates of the particle $d\mu$ which is continually coming into connexion with the system, then if the problem were solved and $\xi$, $\eta$, $\zeta$ given as functions of $t$ (and, when there is more than one particle $d\mu$, of the constant parameters which determine the particular particle), $\frac{d\xi}{dt}$, &c., in the sense just explained, cannot be obtained by simple differentiation from such values of $\xi$, &c.: in fact, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ so given as functions of $t$, belong at the time $t$ to one particle, and at the time $t+dt$ to the next particle, but what is wanted is the increment in the interval $dt$ of the coordinates $\xi$, $\eta$, $\zeta$ of one and the same particle.

Suppose as usual that $x$, $y$, $z$, and in like manner that $\xi$, $\eta$, $\zeta$ are functions of a certain number of independent variables $\theta$, $\phi$, &c., and of the constant parameters which determine the particular particle $dm$ or $d\mu$, of which $x$, $y$, $z$, or $\xi$, $\eta$, $\zeta$ are the coordinates; parameters, that is, which vary from one particle to another, but which are constant during the motion for one and the same particle. The summations are in fact of the nature of definite integrations in regard to these constant parameters, which therefore disappear altogether from the final results. The first term,

$$\Sigma\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right\}dm,$$

may be reduced in the usual manner to the form

$$\Theta\delta\theta+\Phi\delta\phi+\ldots$$

where, writing as usual $\theta'$, $\phi'$, &c. for $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\phi}{dt}$, &c., we have

$$\Theta=\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\theta'}-\frac{dT}{d\theta}+\frac{dV}{d\theta},$$

$$\Phi=\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\phi'}-\frac{dT}{d\phi}+\frac{dV}{d\phi},\ \ \&\text{c.},$$

(this supposes that $Xdx+Ydy+Zdz$ is an exact differential); only it is to be observed that in the problems in hand, the mass of the system is variable, or what is the same thing, the variables $\theta$, $\phi$, &c., are introduced into $T$ and $V$ through the limiting conditions of the summation or definite integration, besides entering directly into $T$ and $V$ in the ordinary manner. And in forming the differential coefficients $\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\theta'}$, $\frac{dT}{d\theta}$, $\frac{dV}{d\theta}$, &c., it is necessary to consider the variables $\theta$, $\phi$, &c., in so far as they enter through the limiting conditions *as exempt from differentiation*, so that the expressions just given for $\Theta$, $\Phi$, &c., are, in the case in hand, rather conventional representations than actual analytical values; this will be made clearer in the sequel by the consideration of the before-mentioned particular problem.

Considering next the second term, or

$$\Sigma \left\{ \left(\frac{d\xi}{dt} - u\right) \delta\xi + \left(\frac{d\eta}{dt} - v\right) \delta\eta + \left(\frac{d\zeta}{dt} - w\right) \delta\zeta \right\} \frac{1}{dt} d\mu,$$

we have here

$$\begin{aligned} \delta\xi &= a\ \ \delta\theta + b\ \ \delta\phi + \ldots, \\ \delta\eta &= a'\ \delta\theta + b'\ \delta\phi + \ldots, \\ \delta\zeta &= a''\ \delta\theta + b''\ \delta\phi + \ldots, \end{aligned}$$

where $a$, $b$, $a'$, &c., are functions of the variables $\theta$, $\phi$, &c., and of the constant parameters which determine the particular particle $d\mu$. The virtual velocities or increments $\delta\theta$, $\delta\phi$, &c., are absolutely arbitrary, and if we replace them by $d\theta$, $d\phi$, &c., the actual increments of $\theta$, $\phi$, &c. in the interval $dt$ during the motion, then $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ will become $\frac{d\xi}{dt}dt$, $\frac{d\eta}{dt}dt$, $\frac{d\zeta}{dt}dt$, in the sense before attributed to $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$.

The particle $d\mu$ will contain $dt$ as a factor, and the other factor will contain the differentials, or (as the case may be) products of differentials, of the constant parameters which determine the particular particle $d\mu$. We have thus the means of expressing the second line in the proper form; and if we write

$$\begin{aligned} \Sigma\,(a^2 + a'^2 + a''^2\ )\, d\mu &= \ \ Adt, \\ \Sigma\,(b^2 + b'^2 + b''^2\ )\, d\mu &= \ \ Bdt, \\ &\vdots \\ \Sigma\,(ab + a'b' + a''b'')\, d\mu &= \ \ Hdt, \\ &\vdots \\ \Sigma\,(au + a'v + a''w\,)\, d\mu &= -\,Pdt, \\ \Sigma\,(bu + b'v + b''w\,)\, d\mu &= -\,Qdt, \\ &\vdots \end{aligned}$$

then the required expression of the second line will be

$$(A\theta' + H\phi' \ldots + P)\,\delta\theta + (H\theta' + B\phi' \ldots + Q)\,\delta\phi + \ldots,$$

which, if we put

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2}\,(A\theta'^2 + B\phi'^2 + \ldots + 2H\theta'\phi' + \ldots + 2P\theta' + 2Q\phi' + \ldots), \\ &= \tfrac{1}{2}\,(A,\ B, \ldots H, \ldots P,\ Q, \ldots \between \theta',\ \phi', \ldots,\ 1)^2, \end{aligned}$$

may be more simply represented by

$$\frac{dK}{d\theta'}\,\delta\theta + \frac{dK}{d\phi'}\,\delta\phi + \ldots;$$

only it is to be remarked that $A$, $B, \ldots H, \ldots P$, $Q, \ldots$ will in general contain not only $\theta$, $\phi, \ldots$, but also the differential coefficients $\theta'$, $\phi', \ldots$, and that in forming the differential coefficients $\frac{dK}{d\theta'}$, $\frac{dK}{d\phi'}$, &c., the quantities $\theta'$, $\phi', \ldots$, in so far as they enter into $K$, not explicitly, but through the coefficients $A$, &c., must be considered *as exempt from differentiation*, so that the preceding expression for the second line by means of the function $K$ is rather a conventional representation than an actual analytical value.

Uniting the two terms, and equating to zero the coefficients of $\delta\theta$, $\delta\phi$, &c., we obtain finally the equations of motion in the form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\theta'}-\frac{dT}{d\theta}+\frac{dV}{d\theta}+\frac{dK}{d\theta'}&=0,\\ \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\phi'}-\frac{dT}{d\phi}+\frac{dV}{d\phi}+\frac{dK}{d\phi'}&=0,\\ &\vdots \end{aligned}$$

where the several symbols are to be taken in the significations before explained.

In the particular problem, let $z$ be measured vertically downwards from the plane of the table, then $Z=g$, and repeating for the particular case the investigation *ab initio*, the general equation of motion is

$$\Sigma\left(\frac{d^2z}{dt^2}-g\right)\delta z\,dm+\frac{d\zeta}{dt}\,\delta\zeta\,\frac{1}{dt}\,d\mu=0.$$

Let $s$ be the length in motion, or, what is the same thing, the $z$ coordinate of the lower extremity; and suppose also that the mass of a unit of length is taken equal to unity, we have $\delta z=\delta s$, $\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d^2s}{dt^2}$, $dm=dz$, and the summation or integration with respect to $z$ is from $z=0$ to $z=s$, whence

$$\Sigma\left(\frac{d^2z}{dt^2}-g\right)\delta z\,dm=\left(\frac{d^2s}{dt^2}-g\right)\delta s\,\Sigma dz=\left(\frac{d^2s}{dt^2}-g\right)s\delta s\,;$$

which is of the form

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{dT}{ds'}-\frac{dT}{ds}+\frac{dV}{ds}\right)\delta s,$$

if

$$T=\tfrac{1}{2}s'^2\,.\,\bar{s},\quad V=-g s\bar{s},$$

where the bar is used to denote exemption from differentiation, but ultimately $\bar{s}$ is to be replaced by $s$. Considering now the second term, here $\zeta=0$, but $\delta\zeta=\delta s$, and thence $\frac{d\zeta}{dt}=s'$. Moreover, $d\mu=s'dt$, and thence finally the second term is $s'^2$, which is of the form $\frac{dK}{ds'}$, if

$$K=\tfrac{1}{2}\bar{s}'\,.\,s'^2,$$

the bar having the same signification as before, but after the differentiation $\bar{s}'=s'$. The resulting equation is

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}-g\right)s+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=0,$$