EXERCICES D'ANALYSE

ET DE

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

MÉMOIRE

SUR

LES RÉSULTANTES QUE L'ON PEUT FORMER

SOIT AVEC LES COSINUS DES ANGLES COMPRIS ENTRE DEUX SYSTÈMES D'AXES, SOIT AVEC LES COORDONNÉES DE DEUX OU TROIS POINTS

Les résultantes dont il s'agit se présentent d'elles-mêmes, comme on sait, dans la solution d'un grand nombre de problèmes. D'ailleurs, celles qui sont formées avec les coordonnées de deux ou trois points peuvent être immédiatement déduites de celles qui renferment les cosinus des angles compris entre deux systèmes d'axes. Ajoutons que l'on facilite la détermination de ces deux espèces de résultantes, en introduisant dans le calcul des quantités propres à indiquer le sens de certains mouvements de rotation, ainsi que je l'expliquerai tout à l'heure.

I. — *Des mouvements de rotation directs et rétrogrades.*

Considérons d'abord, dans un plan donné, diverses longueurs

$$r, \quad s, \quad t, \quad \ldots,$$

dont chacune sera mesurée dans une certaine direction, à partir d'une certaine origine O, et supposons que cette origine soit la même pour toutes ces longueurs. Si un rayon mobile, compté encore à partir du point O, tourne autour de ce point dans le plan donné, il offrira ce que nous appellerons un *mouvement de rotation* de r en s, ou un *mouvement de rotation* de s en r, selon qu'il passera, en décrivant l'angle $(\widehat{r, s})$, de la direction r à la direction s, ou de la direction s à la direction r. Pour distinguer plus facilement, dans le discours et dans les formules, ces deux mouvements l'un de l'autre, nous tracerons, dans le plan de l'angle $(\widehat{r, s})$, deux axes coordonnés des x et y qui passeront par l'origine O; et, en nommant x, y deux longueurs mesurées à partir de cette origine sur les demi-axes des x et y positives, nous appellerons mouvement de rotation *direct* celui qui s'effectuera dans le même sens que le mouvement de rotation de x en y, et mouvement *rétrograde*, celui qui s'effectuera en sens contraire. De plus, nous représenterons, dans ce Mémoire, par la simple notation

$$(r, s),$$

une quantité qui, ayant pour valeur numérique l'unité, sera positive ou négative, suivant que le mouvement de rotation de r en s sera direct ou rétrograde; en sorte qu'on aura, dans le premier cas,

$$(r, s) = 1,$$

dans le second cas,

$$(r, s) = -1.$$

Cela posé, les deux notations

$$(r, s), \quad (s, r)$$

représenteront, dans nos formules, deux quantités affectées de signes contraires, mais équivalentes, au signe près, à l'unité; en sorte qu'on aura

$$(s, r) = -(r, s). \tag{1}$$

Ajoutons que, si l'on nomme

$$r', \quad s', \quad t', \quad \ldots$$

des longueurs mesurées à partir de l'origine O, dans des directions opposées à celles des longueurs

$$r, \quad s, \quad t, \quad \ldots,$$

on aura évidemment

$$(2) \qquad (r', s) = -(r, s),$$

et, par suite,

$$(3) \qquad (r, s) = -(r', s) = (r', s') = -(r, s').$$

Si les axes coordonnés sont rectangulaires, alors, les deux directions x, y étant perpendiculaires entre elles, une troisième direction r formera toujours, avec les deux premières, deux angles

$$(\widehat{r, \mathrm{x}}), \quad (\widehat{r, \mathrm{y}}),$$

dont chacun offrira un cosinus égal, abstraction faite du signe, au sinus de l'autre; et, par suite,

$$\cos(\widehat{r, \mathrm{x}}), \quad \cos(\widehat{r, \mathrm{y}}),$$

auront pour valeurs numériques les quantités positives

$$\sin(\widehat{r, \mathrm{y}}), \quad \sin(\widehat{r, \mathrm{x}}).$$

D'ailleurs, $\cos(\widehat{r, \mathrm{x}})$ sera positif ou négatif, suivant que l'angle $(\widehat{r, \mathrm{x}})$ sera aigu ou obtus. Or, dans le premier cas, r et x étant situés d'un même côté par rapport à l'axe des y, le mouvement de rotation de r en y sera droit, comme le mouvement de rotation de x en y; et, par conséquent, on aura

$$(r, \mathrm{y}) = 1.$$

Dans le second cas, au contraire, r et x étant situés de deux côtés opposés par rapport à l'axe des y, le mouvement de rotation de r en y sera rétrograde, puisqu'il s'effectuera en sens inverse du mouvement de x en y; on aura donc

$$(r, y) = -1.$$

Donc, dans tous les cas, le signe de $\cos(\widehat{r, x})$ sera précisément le signe de (r, y). On prouvera, de même, l'identité du signe de $\cos(\widehat{r, y})$ et du signe de (x, r). Donc, pour obtenir des produits égaux aux cosinus

$$\cos(\widehat{r, x}), \quad \cos(\widehat{s, y}),$$

il suffira de multiplier leurs valeurs numériques

$$\sin(\widehat{r, x}), \quad \sin(\widehat{r, x}),$$

par les facteurs

$$(r, y), \quad (x, r),$$

en sorte qu'on aura

$$(4) \qquad \cos(\widehat{r, x}) = (r, y)\sin(\widehat{r, y}), \qquad \cos(\widehat{r, y}) = (x, r)\sin(\widehat{x, r}).$$

Supposons, maintenant, que les longueurs

$$r, \quad s, \quad t, \quad \ldots,$$

toujours mesurées à partir du point O, soient dirigées d'une manière quelconque dans l'espace. Le mouvement de rotation d'un rayon mobile qui, en décrivant l'angle $(\widehat{r, s})$, passera de r en s, pourra être de deux espèces différentes, non seulement en lui-même, mais encore par rapport à la direction d'une longueur t mesurée à partir du point O en dehors du plan (r, s). En effet, ce mouvement pourra s'effectuer ou de *gauche à droite*, ou de *droite à gauche*, par rapport à la direction t, c'est-à-dire par rapport à un spectateur qui, ayant les pieds posés sur le plan (r, s), serait appuyé contre le demi-axe, sur lequel se mesure la longueur t. Mais il importe d'observer que si le rayon mobile parcourt l'une après l'autre les trois faces de l'angle solide qui a pour arêtes r, s et t, en tournant toujours dans le même sens autour du point O, de manière, par exemple, à décrire successivement les trois angles plans $(\widehat{r, s})$, $(\widehat{s, t})$, $(\widehat{t, r})$, les trois mouvements de rotation de r

en s autour de t, de s en t autour de r, et de t en r autour de s, seront tous les trois de même espèce, c'est-à-dire qu'ils s'effectueront tous les trois de gauche à droite, ou tous les trois de droite à gauche, autour des directions r, s, t. Afin de pouvoir reconnaître plus aisément, dans le discours et dans le calcul, la nature des mouvements dont il s'agit, nous tracerons dans l'espace trois axes coordonnés des x, y, z qui passeront par l'origine O; et en nommant

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}$$

trois longueurs mesurées à partir de cette origine sur les demi-axes des x, y et z positives, nous appellerons *direct* ou *rétrograde* le mouvement de rotation de r en s autour de la direction t, suivant que ce mouvement sera ou ne sera pas de l'espèce des trois mouvements de rotation de x et y autour de z, de y en z autour de x, et de z en x autour de y. De plus, nous représenterons, dans ce Mémoire, par la simple notation

$$(r, s, t),$$

une quantité qui, ayant pour valeur numérique l'unité, sera positive ou négative, suivant que le mouvement de rotation de r en s sera direct ou rétrograde; en sorte qu'on aura, dans le premier cas,

$$(r, s, t) = 1,$$

dans le second cas

$$(r, s, t) = -1.$$

Cela posé, les six notations

$$(r, s, t), \quad (s, t, r), \quad (t, r, s),$$
$$(r, t, s), \quad (s, r, t), \quad (t, s, r)$$

représenteront toujours, dans nos calculs, des quantités équivalentes, au signe près, à l'unité, et liées entre elles par la formule

$$(5) \quad (r, s, t) = (s, t, r) = (t, r, s) = -(r, t, s) = -(s, r, t) = -(t, s, r).$$

Ajoutons que, si l'on nomme

$$r', \quad s', \quad t', \quad \ldots$$

des longueurs mesurées à partir de l'origine O, dans des directions opposées à celles des longueurs

$$r, \quad s, \quad t, \quad \ldots,$$

on aura évidemment

$$(r', s, t) = -(r, s, t), \tag{6}$$

et, par suite,

$$(r, s, t) = -(r', s, t) = (r', s', t) = -(r', s', t') = \ldots. \tag{7}$$

Nous avons, dans ce qui précède, supposé que les diverses longueurs

$$r, \quad s, \quad t, \quad \ldots, \qquad x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

se mesuraient toutes à partir d'une même origine. Pour plus de généralité, nous étendrons l'usage des notations ci dessus indiquées, au cas même ou les diverses longueurs seraient comptées à partir d'origines diverses, et alors nous attribuerons aux notations

$$(r, s), \quad (r, s, t), \quad (\widehat{r, s})$$

les valeurs qu'elles auraient, si les longueurs

$$r, \quad s, \quad t$$

étaient transportées parallèlement à elles-mêmes, de manière à offrir, pour origine commune, un point unique. Enfin, lorsqu'en supposant les longueurs r, s, t mesurées à partir d'origines diverses, nous mentionnerons le plan de l'angle $(\widehat{r, s})$, ou bien encore l'angle solide construit avec les arêtes r, s, t, on devra toujours, par ces paroles, entendre, dans le premier cas, le plan de l'angle compris entre deux longueurs mesurées à partir d'une même origine, dans des directions parallèles à celles de r et de s; et, dans le second cas, l'angle solide qui aurait pour arêtes trois longueurs mesurées à partir d'une même origine, dans des directions parallèles à celles de r, s et t.

On peut, avec la plus grande facilité, déduire des équations (4), jointes au théorème VI de la page 311 du III[e] volume ([1]), les formules connues qui servent à déterminer le cosinus ou le sinus de la somme ou de la différence de deux arcs. En effet, soient

$$r, \quad s$$

deux longueurs mesurées dans un même plan, à partir d'une certaine origine O, et

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}$$

deux autres longueurs mesurées, à partir de la même origine, sur deux axes des x et y perpendiculaires entre eux. Le théorème VI de la page 311 du III[e] volume donnera

$$(8) \qquad \cos(\widehat{r, s}) = \cos(\widehat{r, \mathrm{x}})\cos(\widehat{s, \mathrm{x}}) + \cos(\widehat{r, \mathrm{y}})\cos(\widehat{s, \mathrm{y}}).$$

Mais, eu égard à la seconde des formules (4), on aura

$$\cos(\widehat{r, \mathrm{y}}) = (\mathrm{x}, r)\sin(\widehat{r, \mathrm{x}}), \qquad \cos(\widehat{s, \mathrm{y}}) = (\mathrm{x}, s)\sin(\widehat{s, \mathrm{x}}).$$

Donc on tirera, de la formule (8),

$$(9) \quad \cos(\widehat{r, s}) = \cos(\widehat{r, \mathrm{x}})\cos(\widehat{s, \mathrm{x}}) + (\mathrm{x}, r)(\mathrm{x}, s)\sin(\widehat{r, \mathrm{x}})\sin(\widehat{s, \mathrm{x}}).$$

Concevons maintenant que l'on pose, pour abréger,

$$(\widehat{r, \mathrm{x}}) = a, \qquad (\widehat{s, \mathrm{x}}) = b.$$

Si les longueurs r, s sont situées d'un même côté de l'axe des x, on aura évidemment

$$(\widehat{r, s}) = \pm(a - b), \qquad \cos(\widehat{r, s}) = \cos(a - b),$$
$$(\mathrm{x}, r)(\mathrm{x}, s) = 1,$$

et, par suite, la formule (9) donnera

$$(10) \qquad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Si, au contraire, les deux longueurs r, s sont situées de deux côtés

([1]) *Œuvres de Cauchy*, série II, t. XIII, p. 348.

différents de l'axe des x, on aura

$$\left(\widehat{r, s}\right) = a + b \quad \text{ou} \quad \left(\widehat{r, s}\right) = 2\pi - (a + b), \qquad \cos\left(\widehat{r, s}\right) = \cos(a + b),$$
$$(x, r)(x, s) = -1,$$

et, par suite, la formule (9) donnera

$$(11) \qquad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

D'ailleurs, les formules (10), (11), ainsi établies pour le cas où chacun des angles a, b est positif et inférieur à π, continueront évidemment de subsister, si l'on y fait croître ou décroître chacun de ces angles d'un multiple quelconque de π. Elles subsisteront donc pour des valeurs quelconques, positives ou négatives, de a et de b. Ajoutons que, si, dans les formules (10), (11), l'on remplace a par $\frac{\pi}{2} - a$, on en tirera immédiatement

$$(12) \qquad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$(13) \qquad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

Avant de terminer ce paragraphe, nous allons indiquer encore une notation qui sera employée dans le cours de ce Mémoire, conjointement avec celles que nous venons d'établir, et qui d'ailleurs est, à peu près, celle dont Lagrange a fait usage, dans le tome II de la *Mécanique analytique* (art. 48, page 61). Afin de rendre les formules plus concises et plus faciles à retenir, nous désignerons généralement par

$$[r, s]$$

la surface du parallélogramme que l'on peut construire sur les deux côtés r, s, d'un angle plan $\left(\widehat{r, s}\right)$, réduits l'un et l'autre à l'unité, et par

$$[r, s, t]$$

le volume du parallélipipède que l'on peut construire sur les trois arêtes r, s, t, d'un angle solide, réduites elles-mêmes à l'unité.

D'ailleurs, on obtiendra sans peine les valeurs de

$$[r, s], \quad [r, s, t],$$

en opérant comme il suit :

Si, après avoir construit le parallélogramme dont les côtés sont r et s, on prend r pour base de ce parallélogramme, la hauteur sera représentée par le produit

$$s \sin(\widehat{r, s}).$$

Donc l'aire du parallélogramme sera proportionnelle, pour une valeur déterminée de l'angle $(\widehat{r, s})$, au produit rs, et représentée par l'expression

$$rs \sin(\widehat{r, s}).$$

Si, dans cette expression, l'on réduit chacune des longueurs r, s à l'unité, l'aire dont il s'agit deviendra

$$(14) \qquad [r, s] = \sin(\widehat{r, s}).$$

Concevons maintenant qu'après avoir construit le parallélipipède dont les arêtes r, s, t se coupent au point O, on élève, par ce point, des perpendiculaires aux plans des trois angles

$$(\widehat{s, t}), \quad (\widehat{t, r}), \quad (\widehat{r, s}),$$

et nommons

$$R, \quad S, \quad T$$

trois longueurs mesurées sur ces trois perpendiculaires, la première du même côté que l'arête r par rapport au plan de l'angle $(\widehat{s, t})$, la seconde du même côté que l'arête s par rapport au plan de l'angle $(\widehat{t, r})$, la troisième du même côté que l'arête t par rapport au plan de l'angle $(\widehat{r, s})$. Si l'on prend pour base de ce parallélipipède le parallélogramme qui a pour côtés r et s, et pour aire le produit

$$rs \sin(\widehat{r, s}),$$

la hauteur correspondant à cette base sera évidemment

$$t\cos(\widehat{t, T}).$$

Donc le volume du parallélipipède sera, pour des valeurs déterminées des angles $(\widehat{r, s})$, $(\widehat{t, T})$, proportionnel au produit rst, et ce volume sera exprimé par le produit

$$rst\sin(\widehat{r, s})\cos(\widehat{t, T}).$$

Enfin, si l'on réduit chacune des longueurs rst à l'unité, le volume trouvé deviendra

$$(15)\qquad [r, s, t] = \sin(\widehat{r, s})\cos(\widehat{t, T}).$$

On obtiendra de même, en échangeant les arêtes r, s, t entre elles, deux autres valeurs de $[r, s, t]$ qui seront, avec la précédente, données par la formule

$$(16)\qquad [r, s, t] = \sin(\widehat{s, t})\cos(\widehat{r, R}) = \sin(\widehat{t, r})\cos(\widehat{s, S}) = \sin(\widehat{r, s})\cos(\widehat{t, T}),$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, par l'équation (6) de la page 320 du IIIe volume.

Lorsqu'on introduit dans le calcul les deux expressions

$$[r, s], \quad [r, s, t],$$

l'aire du parallélogramme qui a pour côtés r et s, se trouve représentée par le produit

$$(17)\qquad rs[r, s];$$

et pareillement le volume du parallélipipède qui a pour arêtes les longueurs r, s, t, se trouve représenté par le produit

$$(18)\qquad rst[r, s, t].$$

Ajoutons que les aires du triangle et du parallélogramme, qui ont pour côtés r et s, étant entre elles dans le rapport de 1 à 2, l'aire du triangle sera représentée par le produit

$$(19)\qquad \frac{1}{2}rs[r, s].$$