CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-00326-1 - Oeuvres Completes
Augustin Louis Cauchy
Excerpt
More information

EXERCICES D'ANALYSE

ET DE

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

MÉMOIRE

SUR

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

PRÉLIMINAIRES. — *Considérations générales.*

Lorsque des variables sont liées entre elles par une ou plusieurs équations, alors, en vertu de ces équations mêmes, quelques-unes de ces variables deviennent fonctions des autres considérées comme indépendantes. Alors aussi des accroissements simultanément attribués aux diverses variables se trouvent liés entre eux et à ces variables par des équations nouvelles qui se déduisent immédiatement des équations données. Ajoutons que, si, les accroissements des variables étant supposés infiniment petits, on néglige, vis-à-vis de ces accroissements considérés comme infiniment petits du premier ordre, les infiniment petits des ordres supérieurs au premier, les nouvelles équations deviendront linéaires par rapport aux accroissements infiniment petits des variables. Leibnitz et les premiers géomètres qui se sont occupés de l'analyse infinitésimale ont appelé *différentielles* des variables leurs accroissements infiniment petits, et ils ont donné le nom d'*équations différentielles* aux équations linéaires qui subsistent

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-00326-1 - Oeuvres Completes
Augustin Louis Cauchy
Excerpt
More information

entre ces différentielles. Cette définition des différentielles et des équations différentielles a le grand avantage d'être très générale et de s'étendre à tous les cas possibles. Toutefois, pour ceux qui l'adoptent, les équations différentielles ne deviennent exactes que dans le cas où les différentielles s'évanouissent, c'est-à-dire dans le cas où ces équations mêmes disparaissent. A la vérité, l'inconvénient que nous venons de rappeler n'a point arrêté Euler, et ce grand géomètre, tirant la conséquence rigoureuse des principes généralement admis, a considéré les différentielles comme de véritables zéros qui ont entre eux des rapports finis. Mais d'autres géomètres non moins illustres, et Lagrange à leur tête, n'ont pu se résoudre à introduire dans un même calcul plusieurs sortes de zéros distincts les uns des autres, et c'est pour ce motif qu'à la notion des différentielles Lagrange a songé à substituer la notion des fonctions dérivées, sur laquelle il sera convenable de nous arrêter quelques instants.

Examinons en particulier le cas où l'on considère une seule variable indépendante et une seule fonction de cette variable. Si l'on attribue à cette variable un accroissement infiniment petit, l'accroissement correspondant de la fonction se trouvera lié à la variable et à l'accroissement de la variable, par une équation qui deviendra linéaire à l'égard des deux accroissements, quand on négligera les infiniment petits du second ordre ou d'un ordre supérieur vis-à-vis des infiniment petits du premier ordre. Or l'équation linéaire ainsi obtenue fournira, pour le rapport entre les accroissements infiniment petits de la fonction donnée et de la variable, une fonction nouvelle. Cette fonction nouvelle est précisément celle que Lagrange appelle la *fonction dérivée* (1). Elle représente en réalité la limite du rapport entre les accrois-

(1) La méthode de *maximis* et *minimis*, donnée par Fermat, peut être réduite à la recherche du rapport qu'on obtient quand on divise, par un accroissement indéterminé attribué à une variable, l'accroissement correspondant de la fonction qui doit devenir un *maximum* ou un *minimum*, et à la détermination de la valeur particulière qu'acquiert ce rapport, quand l'accroissement de la variable s'évanouit. Or cette valeur particulière, comme Lagrange en a fait la remarque, est encore la *fonction dérivée*.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-00326-1 - Oeuvres Completes
Augustin Louis Cauchy
Excerpt
More information

sements infiniment petits et simultanés de la fonction et de la variable. Mais, au lieu de lui donner cette origine, Lagrange l'a considérée comme représentant le coefficient de l'accroissement de la variable dans le premier terme de l'accroissement de la fonction développée en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'accroissement de la variable.

Dans le cas où l'on considère un développement en série, abstraction faite du système d'opérations qui a pu produire ce développement, le seul moyen de savoir si le développement dont il s'agit appartient à une fonction donnée, est d'examiner si cette fonction équivaut à la somme de la série supposée convergente. Par suite, pour établir sur des bases rigoureuses la théorie des fonctions dérivées, telle que Lagrange l'a conçue, il faudrait commencer par faire voir que l'accroissement d'une fonction quelconque est, sinon dans tous les cas possibles, du moins sous certaines conditions, la somme d'une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de l'accroissement de la variable. Or la démonstration générale d'un semblable théorème ne peut se donner a priori, et repose nécessairement, même dans le cas où les accroissements deviennent infiniment petits, sur diverses propositions antécédentes; d'où il résulte que ce théorème doit être naturellement regardé, non comme le principe et la base du calcul différentiel, mais comme un des résultats auxquels conduisent les applications de ce calcul. Aussi les difficultés que l'on rencontre, quand on veut déduire la notion des fonctions dérivées de la considération d'une série composée d'un nombre infini de termes, se trouvent-elles à peine dissimulées par toutes les ressources qu'a développées le génie de Lagrange dans les premiers chapitres de la *Théorie des fonctions analytiques*.

On échappe aux difficultés que nous venons de signaler, quand on considère une *fonction dérivée comme la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits et simultanés de la fonction donnée et de la variable dont elle dépend*. En adoptant cette définition on pourrait, avec quelques auteurs, nommer *différentielle de la variable indépen-*

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-00326-1 - Oeuvres Completes
Augustin Louis Cauchy
Excerpt
More information

dante l'accroissement de cette variable, et *différentielle de la fonction donnée* le produit de la fonction dérivée par la différentielle de la variable. On pourrait enfin, lorsqu'une même quantité dépend de plusieurs variables, nommer *différentielle totale* de cette quantité la somme des différentielles qu'on obtiendrait en la considérant successivement comme fonction de chacune des variables dont il s'agit. Mais alors le sens du mot *différentielle*, loin de se trouver généralement fixé, en vertu d'une définition simple applicable à tous les cas possibles, exigerait, pour être complètement déterminé, que l'on expliquât avec précision quelles sont les variables regardées comme indépendantes; et, si, pour fixer les idées, on s'occupait uniquement de deux variables liées entre elles par une seule équation, non seulement la différentielle de la première variable serait définie autrement que la différentielle de la seconde, mais, de plus, la définition de chaque différentielle varierait lorsqu'on changerait la variable indépendante, en considérant tantôt la seconde variable comme fonction de la première, tantôt la première comme fonction de la seconde.

On évitera ces inconvénients si l'on considère les *différentielles* de deux ou de plusieurs variables liées entre elles par une ou plusieurs équations, comme *des quantités finies dont les rapports sont rigoureusement égaux aux limites des rapports entre les accroissements infiniment petits et simultanés de ces variables*. Cette définition nouvelle, que j'ai adoptée dans mon *Calcul différentiel* et dans le Mémoire *sur les méthodes analytiques*, me paraît joindre à l'exactitude désirable tous les avantages qu'offrait, sous le rapport de la simplicité et de la généralité, la définition primitivement admise par Leibnitz et par les géomètres qui l'ont suivi. A la vérité, les différentielles de plusieurs variables ne se trouvent pas complètement déterminées par la définition nouvelle; et cette définition, lors même que toutes les variables se réduisent à des fonctions de l'une d'entre elles, détermine seulement les rapports entre les différentielles de ces diverses variables. Mais l'indétermination qui subsiste est plutôt utile que nuisible dans les problèmes qui se résolvent à l'aide du calcul infini-

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-00326-1 - Oeuvres Completes
Augustin Louis Cauchy
Excerpt
More information

tésimal, attendu qu'elle permet toujours de disposer arbitrairement au moins d'une différentielle; et d'ailleurs, c'est précisément en vertu de cette indétermination même que la définition nouvelle embrasse, comme cas particuliers, les définitions diverses qu'offrirait, pour divers systèmes de variables indépendantes, la théorie que nous rappelions tout à l'heure. En vertu de la nouvelle définition, les divers systèmes de valeurs que peuvent acquérir les différentielles de plusieurs variables liées entre elles par des équations données, restent évidemment les mêmes, quelles que soient celles de ces variables que l'on considère comme indépendantes; et les équations différentielles, c'est-à-dire les équations linéaires auxquelles satisfont les divers systèmes de valeurs, ne sont plus, comme dans la théorie de Leibnitz, des équations approximatives, mais des équations exactes.

Pour écarter complètement l'idée que les formules employées dans le calcul différentiel sont des formules approximatives, et non des formules rigoureusement exactes, il me paraît important de considérer les différentielles comme des quantités finies, en les distinguant soigneusement des accroissements infiniment petits des variables. La considération de ces derniers accroissements peut et doit être employée comme moyen de découverte ou de démonstration dans la recherche des formules ou dans l'établissement des théorèmes. Mais alors le calculateur se sert des infiniment petits comme d'intermédiaires qui doivent le conduire à la connaissance des relations qui subsistent entre des quantités finies; et jamais, à mon avis, des quantités infiniment petites ne doivent être admises dans les équations finales, où leur présence deviendrait sans objet et sans utilité. D'ailleurs, si l'on considérait les différentielles comme des quantités toujours très petites, on renoncerait, par cela même, à l'avantage de pouvoir, entre les différentielles de plusieurs variables, en prendre une pour unité. Or, pour se former une idée précise d'une quantité quelconque, il importe de la rapporter à l'unité de son espèce. Il importe donc de choisir une unité parmi les différentielles. Ajoutons qu'un choix convenable de cette unité suffit pour transformer en différen-

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-00326-1 - Oeuvres Completes
Augustin Louis Cauchy
Excerpt
More information

tielles ce qu'on appelle des fonctions dérivées. En effet, en vertu des définitions adoptées, la *dérivée d'une fonction est ce que devient sa différentielle, quand la différentielle de la variable indépendante est prise pour unité*.

Remarquons encore que la considération d'une variable dont la différentielle est prise pour unité simplifie l'énoncé de la définition que nous avons donnée pour les différentielles en général, et permet de réduire cette définition aux termes suivants :

La différentielle d'une variable quelconque est la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits que peuvent acquérir simultanément la variable dont il s'agit, et la variable dont la différentielle est prise pour unité.

Or, la définition précédente fournit le moyen de démontrer fort simplement les propositions fondamentales du calcul différentiel, et en particulier les théorèmes généraux relatifs à la différentiation des fonctions de fonctions, et des fonctions composées. C'est ce que nous allons expliquer dans ce Mémoire, après avoir indiqué en peu de mots les notations dont nous ferons usage.

1. — *Notations.*

Conformément aux principes établis dans les préliminaires, nous appellerons *différentielles* de plusieurs variables, *des quantités finies dont les rapports sont rigoureusement égaux aux limites des rapports entre les accroissements simultanés et infiniment petits des variables proposées*.

Pour étendre cette définition au cas où les variables deviendraient imaginaires, il suffirait d'y remplacer le mot *quantités* par ceux-ci : *expressions imaginaires*, attendu qu'alors les différentielles elles-mêmes cesseraient généralement d'être réelles. En conséquence, la définition générale des différentielles sera la suivante :

Les différentielles de plusieurs variables réelles ou imaginaires sont des

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-00326-1 - Oeuvres Completes
Augustin Louis Cauchy
Excerpt
More information

quantités finies ou des expressions imaginaires finies, qui, comparées les unes aux autres, offrent des rapports égaux aux limites des rapports entre les accroissements simultanés et infiniment petits de ces variables.

Nous indiquerons, suivant l'usage, les accroissements simultanés, finis ou infiniment petits de variables proposées, à l'aide de la lettre caractéristique Δ, et leurs différentielles à l'aide de la lettre caractéristique d. En conséquence, si l'on nomme

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

les variables proposées, leurs accroissements simultanés, finis ou infiniment petits, seront

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \quad \ldots, \quad \Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta w, \quad \ldots$$

tandis que les notations

$$dx, \quad dy, \quad dz, \quad \ldots, \quad du, \quad dv, \quad dw, \quad \ldots$$

représenteront les différentielles de ces mêmes variables, c'est-à-dire des variables nouvelles dont les rapports seront égaux aux limites des rapports entre les accroissements

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \quad \ldots, \quad \Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta w, \quad \ldots$$

supposés infiniment petits.

Il importe d'observer que, dans le cas même où chacun des rapports entre les accroissements infiniment petits des variables proposées converge vers une limite unique et finie, la définition ci-dessus adoptée ne détermine pas complètement les différentielles des variables, mais seulement les rapports qui existent entre ces différentielles. On pourra donc toujours disposer arbitrairement au moins de la différentielle d'une variable; et l'on ne doit pas s'en étonner, puisque les relations qui peuvent exister entre les diverses variables devront toujours laisser au moins une de ces variables entièrement arbitraire.

Un moyen de simplifier les calculs est évidemment de réduire à

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-00326-1 - Oeuvres Completes
Augustin Louis Cauchy
Excerpt
More information

l'unité la valeur de la différentielle qui demeure arbitraire. D'ailleurs la variable, à laquelle appartient cette différentielle, pourra être ou l'une des variables proposées, ou même une nouvelle variable avec laquelle on ferait varier toutes les autres. En effet, rien n'empêche de concevoir que les accroissements simultanés

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \quad \ldots, \quad \Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta w, \quad \ldots$$

des variables proposées

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots$$

correspondent à l'accroissement Δt d'une variable t, comprise ou non comprise parmi les premières, et de prendre l'unité pour la différentielle de cette variable t, qui devra être considérée comme indépendante de toutes les autres, et qui pourra être censée, si l'on veut, représenter le temps. Il y a plus : si l'on pose

$$\Delta t = \iota,$$

rien n'empêchera de considérer l'accroissement ι de la variable indépendante t comme une nouvelle variable indépendante. C'est ce que nous ferons désormais. D'ailleurs, pour abréger le discours, nous désignerons la variable indépendante t, de laquelle toutes les autres seront censées dépendre, et dont la différentielle sera réduite à l'unité, sous le nom de *variable primitive*.

Cela posé, soit s une variable distincte de la variable primitive t. En vertu des définitions adoptées, le rapport entre les différentielles

$$ds, \quad dt$$

sera la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits

$$\Delta s, \quad \Delta t.$$

On aura donc

$$\frac{ds}{dt} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t}; \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même,

$$ds = dt \lim \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-00326-1 - Oeuvres Completes
Augustin Louis Cauchy
Excerpt
More information

Or de cette dernière équation, jointe aux formules

$$dt = 1, \qquad \Delta t = 1,$$

on tirera

$$ds = \lim \frac{\Delta s}{\iota}. \tag{3}$$

Effectivement, il résulte des définitions admises que la *différentielle d'une variable quelconque s sera la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits* Δs *et* ι *de cette variable et de la variable primitive.*

Concevons maintenant que l'on nomme s et x deux variables quelconques liées entre elles par une certaine équation. Cette équation, résolue par rapport à s, déterminera s en fonction de x. D'ailleurs, s étant considéré comme fonction de la variable x, le rapport entre les différentielles ds, dx de cette fonction et de cette variable sera la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits Δs, Δx. On aura effectivement, en remplaçant s par x dans la formule (1),

$$\frac{ds}{dx} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta x}, \tag{4}$$

ou, ce qui revient au même,

$$ds = dx \lim \frac{\Delta s}{\Delta x}. \tag{5}$$

Or la valeur qu'acquerrait la différentielle ds de la fonction, si la différentielle dx de la variable se réduisait à l'unité, est précisément ce qu'on nomme la *fonction dérivée* de s, relative à la variable x. Si l'on désigne par la lettre caractéristique D_x, et à l'aide de la notation

$$\mathrm{D}_x s,$$

cette fonction dérivée, on aura, en vertu de la formule (5),

$$\mathrm{D}_x s = \lim \frac{\Delta s}{\Delta x}, \tag{6}$$

et, par suite, cette formule donnera généralement

$$ds = \mathrm{D}_x s \, dx. \tag{7}$$

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-00326-1 - Oeuvres Completes
Augustin Louis Cauchy
Excerpt
More information

Concevons à présent que s représente une fonction de plusieurs variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots.$$

On pourra partager ces variables en divers groupes ou systèmes, et chercher l'accroissement que la fonction s reçoit quand on attribue des accroissements infiniment petits

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \quad \ldots, \quad \Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta w, \quad \ldots,$$

à toutes les variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u, \quad v, \quad w, \quad \ldots,$$

ou seulement aux variables comprises dans le premier groupe, dans le second, dans le troisième, ... En opérant ainsi, on obtiendra, dans le premier cas, l'*accroissement total de s*, que nous continuerons à exprimer par la notation

$$\Delta s,$$

et dans le second cas un *accroissement partiel* de s, qui correspondra au changement de valeur des variables comprises dans un seul groupe, et qui sera représenté par l'une des notations

$$\Delta_{\prime} s, \quad \Delta_{\prime\prime} s, \quad \Delta_{\prime\prime\prime} s, \quad \ldots.$$

A l'*accroissement total* Δs correspondra la *différentielle totale ds* déterminée par la formule (3); et de même aux *accroissements partiels*

$$\Delta_{\prime} s, \quad \Delta_{\prime\prime} s, \quad \Delta_{\prime\prime\prime} s, \quad \ldots,$$

correspondront des *différentielles partielles*

$$d_{\prime} s, \quad d_{\prime\prime} s, \quad d_{\prime\prime\prime} s, \quad \ldots,$$

déterminées par des équations de la forme

$$d_{\prime} s = \lim \frac{\Delta_{\prime} s}{\iota}. \tag{8}$$

Après avoir partagé en plusieurs groupes les variables desquelles dépend la fonction s, on peut calculer non seulement *ses accroissements*

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org