EXERCICES D'ANALYSE

ET DE

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

AVERTISSEMENT.

La bienveillance avec laquelle les géomètres ont accueilli mes anciens et nouveaux *Exercices de Mathématiques*, publiés successivement à Paris et à Prague, ainsi que mes *Résumés analytiques* publiés à Turin, m'encourage à faire paraître un quatrième recueil, dans lequel je traiterai encore des diverses questions relatives soit à l'Analyse pure, soit à la Physique mathématique. Je me propose en particulier d'offrir ici aux Amis des sciences la suite de mes recherches sur les mouvements des systèmes de molécules, et sur la théorie de la lumière; des règles générales sur la convergence des séries suivant lesquelles se développent les fonctions explicites ou implicites; des méthodes générales pour la détermination et la réduction des intégrales définies ou indéfinies, ainsi que pour l'intégration des équations différentielles, et aux différences partielles; enfin de nouvelles applications du *calcul des résidus*, et de celui que, dans quelques Mémoires relatifs à l'Astronomie, j'ai nommé le *calcul des limites*. Un puissant motif de poursuivre mes travaux sur la Mécanique céleste était l'honneur que m'a fait le Bureau des Longitudes, en m'appelant, dans la séance du 13 novembre 1839, à la place précédemment occupée par un savant confrère (M. de Prony) qui jadis parut prendre quelque plaisir à me compter au nombre de ses élèves, et plus anciennement par Lagrange lui-même, par cet illustre géomètre qui eut aussi pour moi tant de bontés, et voulut bien guider mes premiers pas dans la carrière des sciences. Je devais redoubler d'efforts pour essayer de répondre de mon mieux à ce témoignage de considération, auquel j'attache d'autant plus de prix que je l'avais moins recherché et me tenais plus à l'écart, pour me livrer, dans le silence du cabinet, à mes études favorites. L'indulgence avec laquelle ont été reçus mes derniers Mémoires prouve que l'on m'a tenu compte de ma bonne volonté. Pour la consolation de ma patrie, comme j'en ai déjà fait ailleurs la remarque, il y a deux sentiments qu'en France on aime à voir profondément gravés dans les cœurs et auxquels, je le sais par expérience, on se plaît à rendre justice; je veux dire : le dévouement à l'infortune et l'amour sincère de la vérité.

MÉMOIRE

SUR LES

MOUVEMENTS INFINIMENT PETITS

D'UN

SYSTÈME DE MOLÉCULES

SOLLICITÉES

PAR DES FORCES D'ATTRACTION OU DE RÉPULSION MUTUELLE.

§ Ier. — *Équations d'équilibre et de mouvement d'un système de molécules.*

Considérons un système de molécules sollicitées au mouvement par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Soient, au premier instant et dans l'état d'équilibre :

x, y, z les coordonnées d'une molécule $\mathfrak{m}$,
$x + \mathrm{x}$, $y + \mathrm{y}$, $z + \mathrm{z}$ les coordonnées d'une autre molécule m,
r le rayon vecteur mené de la molécule $\mathfrak{m}$ à la molécule m;

on aura

$$r^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2,$$

et les cosinus des angles formés par le rayon vecteur r avec les demi-axes des coordonnées positives, seront respectivement

$$\frac{\mathrm{x}}{r}, \quad \frac{\mathrm{y}}{r}, \quad \frac{\mathrm{z}}{r}.$$

Supposons d'ailleurs que l'attraction ou la répulsion mutuelle des deux masses $\mathfrak{m}$, m, étant proportionnelle à ces masses et à une fonction de la distance r, soit représentée, au signe près, par

$$\mathfrak{m} m \, \mathrm{f}(r),$$

$\mathrm{f}(r)$ désignant une quantité positive, lorsque les molécules s'attirent, et négative, lorsqu'elles se repoussent. Les projections algébriques de la force

$$\mathfrak{m} m \, \mathrm{f}(r)$$

sur les axes coordonnés seront les produits de cette force par les cosinus des angles que forme le rayon vecteur r avec ces axes, et, en conséquence, si l'on fait pour abréger

$$\frac{\mathrm{f}(r)}{r} = f(r), \tag{2}$$

elles se réduiront à

$$\mathfrak{m} m \mathrm{x} f(r), \quad \mathfrak{m} m \mathrm{y} f(r), \quad \mathfrak{m} m \mathrm{z} f(r).$$

Cela posé, les équations d'équilibre de la molécule $\mathfrak{m}$ seront évidemment

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= \mathrm{S}[m \mathrm{x} f(r)], \\ 0 &= \mathrm{S}[m \mathrm{y} f(r)], \\ 0 &= \mathrm{S}[m \mathrm{z} f(r)], \end{aligned} \right. \tag{3}$$

la lettre caractéristique S indiquant une somme de termes semblables entre eux et relatifs aux diverses molécules m du système donné.

Concevons maintenant que les molécules

$$\mathfrak{m}, \quad m, \quad \ldots$$

viennent à se mouvoir. Soient, au bout du temps t,

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

les déplacements de la molécule $\mathfrak{m}$, mesurés parallèlement aux axes coordonnés. Soient d'ailleurs

$$\xi + \Delta\xi, \quad \eta + \Delta\eta, \quad \zeta + \Delta\zeta$$

ce que deviennent ces déplacements, lorsqu'on passe de la molécule $\mathfrak{m}$ à la molécule m. Les coordonnées de la molécule $\mathfrak{m}$, au bout du temps t, seront

$$x+\xi,\quad y+\eta,\quad z+\zeta,$$

tandis que celles de la molécule m seront

$$x+\mathrm{x}+\xi+\Delta\xi,\quad y+\mathrm{y}+\eta+\Delta\eta,\quad z+\mathrm{z}+\zeta+\Delta\zeta.$$

Soit à cette même époque

$$r+\rho$$

la distance des molécules $\mathfrak{m}$, m. La distance

$$r+\rho$$

offrira pour projections algébriques, sur les axes des x, y, z, les différences entre les coordonnées des molécules $\mathfrak{m}$, m; savoir :

$$\mathrm{x}+\Delta\xi,\quad \mathrm{y}+\Delta\eta,\quad \mathrm{z}+\Delta\zeta.$$

On aura en conséquence

$$(r+\rho)^2=(\mathrm{x}+\Delta\xi)^2+(\mathrm{y}+\Delta\eta)^2+(\mathrm{z}+\Delta\zeta)^2. \tag{4}$$

Cela posé, pour déduire les équations du mouvement de la molécule $\mathfrak{m}$ de ses équations d'équilibre, c'est-à-dire des formules (3), il suffira évidemment de remplacer, dans ces formules, les premiers membres par

$$\frac{d^2\xi}{dt^2},\quad \frac{d^2\eta}{dt^2},\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

puis de substituer, à la distance

$$r$$

et à ses projections algébriques

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},$$

la distance

$$r+\rho$$

et ses projections algébriques

$$\mathrm{x}+\Delta\xi,\quad \mathrm{y}+\Delta\eta,\quad \mathrm{z}+\Delta\zeta;$$

en opérant ainsi, on trouvera

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \mathrm{S}[m(\mathrm{x}+\Delta\xi)\,f(r+\rho)], \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \mathrm{S}[m(\mathrm{y}+\Delta\eta)f(r+\rho)], \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = \mathrm{S}[m(\mathrm{z}+\Delta\zeta)\,f(r+\rho)]. \end{cases}$$

§ II. — *Équations des mouvements infiniment petits d'un système de molécules.*

Considérons, dans le système de molécules donné, un mouvement vibratoire, en vertu duquel chaque molécule s'écarte très peu de sa position initiale. Si l'on cherche les lois du mouvement, celles du moins qui subsistent quelque petite que soit l'étendue des vibrations moléculaires, alors en regardant les déplacements

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta$$

et leurs différences

$$\Delta\xi,\quad \Delta\eta,\quad \Delta\zeta,$$

comme des quantités infiniment petites du premier ordre, on pourra négliger les carrés et les puissances supérieures, non seulement de ces déplacements et de leurs différences, mais aussi de la quantité ρ, dans les développements des expressions que renferment les formules (4), (5) du premier paragraphe; et l'on pourra encore supposer indifféremment que, des quatre variables indépendantes

$$x,\quad y,\quad z,\quad t,$$

les trois premières représentent ou les coordonnées initiales de la molécule $\mathfrak{m}$, ou ses coordonnées courantes qui, en vertu de l'hypothèse admise, différeront très peu des premières. Cela posé, si l'on a égard aux formules (3) du paragraphe Ier, les formules (4) et (5) du même paragraphe donneront

$$(1)\qquad \rho = \frac{\mathrm{x}\,\Delta\xi + \mathrm{y}\,\Delta\eta + \mathrm{z}\,\Delta\zeta}{r}$$

et

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \mathrm{S}[mf(r)\Delta\xi] + \mathrm{S}\left[m\dfrac{df(r)}{dr}\mathrm{x}\rho\right], \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \mathrm{S}[mf(r)\Delta\eta] + \mathrm{S}\left[m\dfrac{df(r)}{dr}\mathrm{y}\rho\right], \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = \mathrm{S}[mf(r)\Delta\zeta] + \mathrm{S}\left[m\dfrac{df(r)}{dr}\mathrm{z}\rho\right], \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \mathrm{L}\xi + \mathrm{R}\eta + \mathrm{Q}\zeta, \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \mathrm{R}\xi + \mathrm{M}\eta + \mathrm{P}\zeta, \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = \mathrm{Q}\xi + \mathrm{P}\eta + \mathrm{N}\zeta, \end{cases}$$

pourvu que, 8 désignant une fonction quelconque des variables x, y, z et

$$\Delta 8$$

l'accroissement de 8 dans le cas où l'on fait croître

$$x \text{ de } \mathrm{x}, \quad y \text{ de } \mathrm{y}, \quad z \text{ de } \mathrm{z},$$

on représente, à l'aide des lettres

$$\mathrm{L}, \quad \mathrm{M}, \quad \mathrm{N}, \quad \mathrm{P}, \quad \mathrm{Q}, \quad \mathrm{R},$$

non pas des quantités, mais des caractéristiques déterminées par les formules

$$\mathrm{L}8 = \mathrm{S}\left\{m\left[f(r) + \frac{\mathrm{x}^2}{r}\frac{df(r)}{dr}\right]\Delta 8\right\}, \qquad \mathrm{M} = \ldots, \qquad \mathrm{N} = \ldots,$$

$$\mathrm{P}8 = \mathrm{S}\left[m\frac{\mathrm{yz}}{r}\frac{df(r)}{dr}\Delta 8\right], \qquad \mathrm{Q} = \ldots, \qquad \mathrm{R} = \ldots.$$

Comme d'ailleurs ces diverses formules doivent servir à déterminer les caractéristiques

$$\mathrm{L}, \quad \mathrm{M}, \quad \mathrm{N}, \quad \mathrm{P}, \quad \mathrm{Q}, \quad \mathrm{R},$$

quelle que soit la fonction de x, y, z désignée par 8, elles peuvent être, pour plus de simplicité, présentées sous la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \mathrm{L} = \mathrm{S}\left\{ m\left[f(r) + \dfrac{\mathrm{x}^2}{r}\dfrac{d\,f(r)}{dr}\right]\Delta\right\}, & \mathrm{M} = \ldots, \quad \mathrm{N} = \ldots, \\ \mathrm{P} = \mathrm{S}\left[m\dfrac{\mathrm{yz}}{r}\dfrac{d\,f(r)}{dr}\Delta\right], & \mathrm{Q} = \ldots, \quad \mathrm{R} = \ldots. \end{cases}$$

Enfin, si l'on désigne, à l'aide des caractéristiques

$$\mathrm{D}_x, \quad \mathrm{D}_y, \quad \mathrm{D}_z, \quad \mathrm{D}_t$$

et de leurs puissances entières, les dérivées qu'on obtient quand on différentie une ou plusieurs fois de suite une fonction des variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad t,$$

par rapport à ces mêmes variables, les équations (3) pourront s'écrire comme il suit :

$$(5)\quad \begin{cases} (\mathrm{L} - \mathrm{D}_t^2)\xi + \mathrm{R}\eta + \mathrm{Q}\zeta = 0, \\ \mathrm{R}\xi + (\mathrm{M} - \mathrm{D}_t^2)\eta + \mathrm{P}\zeta = 0, \\ \mathrm{Q}\xi + \mathrm{P}\eta + (\mathrm{N} - \mathrm{D}_t^2)\zeta = 0. \end{cases}$$

Pour réduire les équations (5) à la forme d'équations linéaires aux différences partielles, il suffira de développer les différences finies des variables principales

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

en séries ordonnées suivant leurs dérivées des divers ordres. On y parviendra aisément à l'aide de la formule de Taylor, en vertu de laquelle on aura

$$8 + \Delta 8 = e^{\mathrm{x}\mathrm{D}_x + \mathrm{y}\mathrm{D}_y + \mathrm{z}\mathrm{D}_z} 8,$$

quelle que soit la fonction de

$$x, \quad y, \quad z$$

désignée par 8, et par conséquent

$$(6)\quad 1 + \Delta = e^{\mathrm{x}\mathrm{D}_x + \mathrm{y}\mathrm{D}_y + \mathrm{z}\mathrm{D}_z},$$

$$(7)\quad \Delta = e^{\mathrm{x}\mathrm{D}_x + \mathrm{y}\mathrm{D}_y + \mathrm{z}\mathrm{D}_z} - 1 = \mathrm{x}\mathrm{D}_x + \mathrm{y}\mathrm{D}_y + \mathrm{z}\mathrm{D}_z + \frac{(\mathrm{x}\mathrm{D}_x + \mathrm{y}\mathrm{D}_y + \mathrm{z}\mathrm{D}_z)^2}{2} + \ldots$$

Cela posé, dans les équations (5), ramenées à la forme d'équations aux différences partielles, les coefficients des dérivées des variables principales se réduiront toujours à des sommes de l'une des formes

$$(8) \qquad \mathrm{S}[m \mathrm{x}^n \mathrm{y}^{n'} \mathrm{z}^{n''} f(r)], \quad \mathrm{S}\left[m \mathrm{x}^n \mathrm{y}^{n'} \mathrm{z}^{n''} \frac{d f(r)}{dz}\right],$$

par conséquent à des sommes dans chacune desquelles la masse m se trouvera multipliée, sous le signe S, par des puissances entières de x, y, z et par une fonction de r.

On pourra regarder la constitution du système donné de molécules comme étant partout la même, si les sommes (8) se réduisent à des quantités constantes, c'est-à-dire à des quantités indépendantes des coordonnées

$$x, \quad y, \quad z$$

de la molécule $\mathfrak{m}$. C'est ce qui aura lieu, par exemple, quand le système donné sera un corps homogène, gazeux ou liquide ou cristallisé. Alors les équations des mouvements infiniment petits du système donné, c'est-à-dire les équations (5), pourront être considérées comme des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants entre les trois variables principales

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

et les quatre variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad t.$$

De semblables équations sont propres à représenter, par exemple, les mouvements infiniment petits du fluide lumineux dans le vide, ou bien encore les mouvements infiniment petits d'un corps élastique.

§ III. — *Mouvements simples.*

La solution de plusieurs problèmes de Physique mathématique pouvant dépendre de l'intégration des équations (3) du paragraphe précédent, considérées comme équations linéaires à coefficients constants, nous allons rechercher ici les intégrales de ces équations, en nous bornant pour l'instant aux intégrales qui représentent les mouvements simples, définis comme on le verra ci-après.

Lorsque les sommes (8) du paragraphe II demeurent constantes, alors, pour satisfaire aux équations (5) du même paragraphe, il suffit de supposer les variables principales

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

toutes proportionnelles à une même exponentielle népérienne dont l'exposant soit une fonction linéaire des variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad z, \quad t,$$

et de prendre en conséquence

$$(1) \qquad \xi = \mathrm{A}e^{ux+vy+wz-st}, \qquad \eta = \mathrm{B}e^{ux+vy+wz-st}, \qquad \zeta = \mathrm{C}e^{ux+vy+wz-st},$$

u, v, w, s, A, B, C désignant des constantes réelles ou imaginaires convenablement choisies. En effet, si l'on substitue les valeurs précédentes de

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta,$$

dans les équations (5) du second paragraphe, tous les termes seront divisibles par l'exponentielle

$$e^{ux+vy+wz-st},$$

et, après la division effectuée, ces équations seront réduites à d'autres de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} (\mathcal{L}-s^2)\mathrm{A}+\mathcal{R}\mathrm{B}+\mathcal{Q}\mathrm{C}=0, \\ \mathcal{R}\mathrm{A}+(\mathcal{M}-s^2)\mathrm{B}+\mathcal{P}\mathrm{C}=0, \\ \mathcal{Q}\mathrm{A}+\mathcal{P}\mathrm{B}+(\mathcal{N}-s^2)\mathrm{C}=0, \end{cases}$$

les valeurs des coefficients

$$\mathcal{L}, \quad \mathcal{M}, \quad \mathcal{N}, \quad \mathcal{P}, \quad \mathcal{Q}, \quad \mathcal{R}$$