RÉSUMÉS ANALYTIQUES.

AVERTISSEMENT.

L'expérience de l'enseignement m'a prouvé qu'on peut simplifier encore sur plusieurs points l'étude de l'Analyse. D'autre part, des recherches approfondies sur différentes branches des Sciences mathématiques m'ont conduit à des résultats nouveaux et à de nouvelles méthodes qui fournissent la solution d'un grand nombre de questions diverses. Déjà quelques-unes de ces méthodes se trouvent indiquées dans des Notes que renferme le *Bulletin des Sciences*, et présentées avec plus d'étendue dans les deux Mémoires lithographiés en 1831 et 1832. En attendant que je puisse donner à ces matières de plus amples développements par la publication de Traités spéciaux, ou la reprise des *Exercices de Mathématiques*, j'ai pensé qu'une série d'articles destinés à offrir le résumé des théories les plus importantes de l'Analyse, soit anciennes, soit nouvelles, particulièrement des théories qu'embrasse l'Analyse algébrique et des méthodes qui en rendent l'exposition plus facile, pourrait intéresser les géomètres et ceux qui s'adonnent à la culture des Sciences. Tel est le but que je me propose dans le présent Ouvrage, qui paraîtra par cahiers à des époques plus ou moins rapprochées les unes des autres, suivant le plus ou moins de temps que les circonstances me permettront d'y consacrer.

§ I. — *Sur les nombres figurés.*

Désignons par $(m)_n$ le nombre des produits qu'on peut former avec m lettres a, b, c, ... combinées n à n. Parmi ces produits, le nombre de ceux qui renfermeront la lettre a sera évidemment

$$(m-1)_{n-1},$$

et le nombre de ceux qui renfermeront seulement les $m-1$ autres lettres b, c, ... sera

$$(m-1)_n.$$

On aura donc

$$(m)_n = (m-1)_n + (m-1)_{n-1}. \tag{1}$$

De plus, si l'on forme : 1° les produits qui renferment la lettre a et dont le nombre est $(m-1)_{n-1}$; 2° les produits qui renferment la lettre b et dont le nombre est encore $(m-1)_{n-1}$, ..., on obtiendra en tout

$$m(m-1)_{n-1}$$

produits. Mais, en opérant de cette manière, on obtiendra n fois chaque produit; car, si $n=3$, par exemple, le produit abc sera compris, et parmi ceux qui renferment la lettre a, et parmi ceux qui renferment la lettre b, et parmi ceux qui renferment la lettre c. Donc

$$(m)_n = \frac{m}{n}(m-1)_{n-1}. \tag{2}$$

Observons enfin qu'on aura évidemment

$$(m)_1 = m, \tag{3}$$

et que, à chaque produit formé avec n lettres prises dans la suite a, b, c, ..., correspond un seul produit formé avec les $m-n$ lettres restantes; d'où il suit qu'on trouvera généralement

$$(m)_n = (m)_{m-n}. \tag{4}$$

Si au nombre m, qui doit toujours être égal ou supérieur à n, on attribue successivement les valeurs

$$n, \quad n+1, \quad n+2, \quad \ldots,$$

l'expression $(m)_n$ engendrera la suite des nombres

$$(n)_n = 1, \qquad (n+1)_n = (n+1)_1 = n+1, \qquad (n+2)_n, \qquad (n+3)_n, \qquad \ldots$$

qu'on appelle les nombres *figurés* de l'ordre n. Ceux du premier ordre seront, en vertu de la formule (3), les nombres *naturels*

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots;$$

et généralement ceux du premier, du second, du troisième ordre, etc. composeront la seconde, la troisième, la quatrième, ... ligne horizontale du triangle arithmétique de Pascal, savoir

1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	...,
	1,	$(2)_1$,	$(3)_1$,	$(4)_1$,	$(5)_1$,	$(6)_1$,	$(7)_1$,	$(8)_1$,	...,
		1,	$(3)_2$,	$(4)_2$,	$(5)_2$,	$(6)_2$,	$(7)_2$,	$(8)_2$,	...,
			1,	$(4)_3$,	$(5)_3$,	$(6)_3$,	$(7)_3$,	$(8)_3$,	...,
				1,	$(5)_4$,	$(6)_4$,	$(7)_4$,	$(8)_4$,	...,
					1,	$(6)_5$,	$(7)_5$,	$(8)_5$,	...,
						1,	$(7)_6$,	$(8)_6$,	...,
							1,	$(8)_7$,	...,
								1,	...

ou

1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	...,
	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	...,
		1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	...,
			1,	4,	10,	20,	35,	56,	...,
				1,	5,	15,	35,	70,	...,
					1,	6,	21,	56,	...,
						1,	7,	28,	...,
							1,	8,	...,
								1,	....

Dans ce Tableau, les termes de la première suite sont tous égaux à l'unité. De plus, le premier terme de chaque nouvelle suite, équivalent lui-même à l'unité, est avancé d'un rang vers la droite par rapport au premier terme de la suite précédente; et chaque nouveau terme d'une suite quelconque est, en vertu de la formule (1), la somme qu'on obtient lorsqu'on ajoute au terme précédent de la même suite le nombre qui se trouve immédiatement au-dessus. Il en résulte que le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite des nombres figurés de l'ordre $m+1$ est la somme des n premiers nombres figurés de l'ordre m. On a donc

$$(5) \qquad 1+(m+1)_m+(m+2)_m+\ldots+(m+n-1)_m=(m+n)_{m+1}.$$

Au reste, la formule (5) peut être déduite immédiatement de la formule (1).

De la formule (2) on tire successivement

$$(m)_n=\frac{m}{n}(m-1)_{n-1}, \qquad (m-1)_{n-1}=\frac{m-1}{n-1}(m-2)_{n-2}, \qquad \ldots$$

et, par suite,

$$(6) \qquad (m)_n=\frac{m}{n}\,\frac{m-1}{n-1}\,\frac{m-2}{n-2}\cdots\frac{m-(n-1)}{n-(n-1)}$$

ou

$$(7) \qquad (m)_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}.$$

Cela posé, la formule (5) donnera

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} &1+(m+1)+\frac{(m+1)(m+2)}{1.2}+\ldots \\ &\qquad +\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots m}=\frac{n(n+1)\ldots(n+m)}{1.2\ldots(m+1)}.\end{aligned}\right.$$

Ainsi, en particulier,

$$(9) \qquad 1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$(10) \qquad 1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3},$$

$$(11) \qquad 1+4+10+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3.4},$$

. . . .

En vertu de l'équation (9), les sommes des n premiers termes des progressions arithmétiques

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad (n-1),$$
$$a,\quad a+b,\quad a+2b,\quad \ldots,\quad a+(n-1)b$$

seront respectivement

$$(12)\qquad 0+1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

et

$$(13)\qquad na+[1+2+\ldots+(n-1)]b=na+\frac{n(n-1)}{2}b=n\left[a+\frac{(n-1)}{2}b\right].$$

Le second membre de la formule (12) ou (13) est le produit de n par la demi-somme du premier et du dernier terme de la progression que l'on considère.

Si l'on indique la somme des n premiers termes d'une suite par la lettre S placée devant le $n^{\text{ième}}$ terme, les équations (9), (10), (11) pourront s'écrire comme il suit

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &S(n)=\frac{n(n+1)}{2},\\ &S\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3},\\ &S\left[\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}\right]=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3.4},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et l'on en conclura

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &S(n)=\frac{n(n+1)}{2},\\ &S[n(n+1)]=\frac{n(n+1)(n+2)}{3},\\ &S[n(n+1)(n+2)]=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Si des boulets de même diamètre sont distribués, dans plusieurs couches superposées, de manière à figurer une pyramide triangulaire, et dans chaque couche sur plusieurs files parallèles, de manière à figurer un triangle équilatéral, le nombre des boulets compris dans une couche triangulaire, ou dans la pyramide, se trouvera déterminé par la formule (9) ou (10), et sera ce qu'on nomme un nombre *triangulaire* ou un nombre *pyramidal*. Donc les nombres triangulaires et pyramidaux se confondent avec les nombres figurés du second et du troisième ordre.

§ II. — *Développement du produit de plusieurs binômes, ou d'une puissance entière et positive de l'un d'entre eux; théorème de Fermat sur les nombres premiers.*

Considérons m binômes différents de la forme

$$x+a,\quad x+b,\quad x+c,\quad \ldots.$$

En les multipliant l'un par l'autre, on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\\&=x^m+(a+b+c+\ldots)x^{m-1}+(ab+ac+\ldots+bc+\ldots)x^{m-2}+\ldots+abc\ldots;\end{aligned}\right.$$

de plus, en posant

$$a=b=c=\ldots,$$

on trouvera

$$\begin{aligned}a+b+c+\ldots&=ma=(m)_1 a,\\ ab+ac+\ldots+bc+\ldots&=(m)_2 a^2,\\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots,\\ abc\ldots&=a^m.\end{aligned}$$

Donc, par suite,

$$(2)\qquad (x+a)^m=x^m+(m)_1 a x^{m-1}+(m)_2 a^2 x^{m-2}+\ldots+a^m.$$

Dans le second membre de l'équation (2), les coefficients des diverses puissances de x et de a, savoir

$$(3)\qquad 1,\quad (m)_1,\quad (m)_2,\quad \ldots,\quad (m)_2,\quad (m)_1,\quad 1,$$

sont précisément les nombres qui composent la $(m+1)^{\text{ième}}$ colonne verticale du triangle arithmétique de Pascal, et le coefficient de

$$a^{m-n}x^n \quad \text{ou de} \quad a^n x^{m-n}$$

est

$$(4) \qquad (m)_n = (m)_{m-n}$$

ou, en vertu de la formule (7) du § I,

$$(5) \qquad \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} = \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots(m-n)}.$$

On peut s'assurer que les fractions contenues dans les deux membres de la formule (5) sont égales en les réduisant au même dénominateur.

Si l'on pose successivement

$$m=2, \qquad m=3, \qquad m=4, \qquad m=5, \qquad \ldots,$$

on trouvera, en prenant pour coefficients les divers termes des colonnes verticales du triangle arithmétique,

$$\begin{aligned}
(x+a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2,\\
(x+a)^3 &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3,\\
(x+a)^4 &= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4,\\
(x+a)^5 &= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Lorsque dans la formule (2) on pose $a = 1$, elle donne

$$(6) \qquad (x+1)^m = x^m + (m)_1 x^{m-1} + (m)_2 x^{m-2} + \ldots + 1.$$

Si l'on fait de plus $x = 1$, on trouvera

$$(7) \qquad 2^m = 1 + (m)_1 + (m)_2 + \ldots + (m)_2 + (m)_1 + 1.$$

Donc les divers coefficients, dont le nombre est $m+1$, fournissent une somme égale à 2^m. Lorsque m est un nombre premier, tous les termes de la suite contenue dans le second membre de la formule (7) sont, à l'exception du premier et du dernier, des multiples de m. Donc alors 2^m divisé par m donne 2 pour reste. Dans le même cas, n étant un nombre entier quelconque,

$$(n+1)^m$$

divisé par m donne, en vertu de la formule (6), le même reste que n^m+1, et par suite

$$(n+1)^m-(n+1)$$

donne le même reste que

$$n^m-n.$$

Donc 2^m-2 étant divisible par m, on pourra en dire autant de 3^m-3, puis de 4^m-4, ..., et généralement de

$$n^m-n=n(n^{m-1}-1).$$

Donc, si n n'est pas divisible par le nombre premier m, n^{m-1} divisé par m donnera l'unité pour reste, ce qui constitue le théorème de Fermat sur les nombres premiers.

Lorsque dans l'équation (1) on remplace $a, b, c, \ldots$ par $-a, -b, -c, \ldots$, on en tire

$$(8)\qquad (x-a)(x-b)(x-c)\ldots=x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m,$$

les valeurs de $A_1, A_2, \ldots, A_m$ étant

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_1=-(a+b+c+\ldots),\\ A_2=ab+ac+\ldots+bc+\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ A_m=(-1)^m abc\ldots=\pm abc\ldots. \end{array}\right.$$

§ III. — *Des variables et des fonctions en général, et, en particulier, des fonctions entières d'une seule variable. Relations qui existent entre les coefficients des puissances entières et positives d'un binôme.*

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On appelle, au contraire, quantité *constante* toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones réguliers inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus, etc.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit*, ou une *quantité infiniment petite*. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent de plus en plus, de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné, on dit que cette variable a pour limite l'*infini positif*, indiqué par le signe ∞, s'il s'agit d'une variable positive, et l'*infini négatif*, indiqué par la notation $-\infty$, s'il s'agit d'une variable négative.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable indépendante*, et les autres quantités, exprimées au moyen de la variable indépendante, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de cette variable.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, les valeurs de quelques-unes d'entre elles étant données, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit ces diverses quantités exprimées au moyen de plusieurs d'entre elles, qui prennent alors le nom de *variables indépendantes*, et les quantités restantes, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de ces mêmes variables.

Les diverses expressions que fournissent l'Algèbre et la Trigonométrie, lorsqu'elles renferment des variables considérées comme indépendantes, sont autant de fonctions de ces mêmes variables. Ainsi, par exemple,

$$ax,\quad x^m,\quad A^x,\quad Lx,\quad \ldots$$

sont des fonctions de la variable x;

$$x+y,\quad x^y,\quad xyz,\quad \ldots$$

sont des fonctions des variables x, y ou x, y et z, ...

Lorsque des fonctions d'une ou de plusieurs variables se trouvent, comme dans les exemples précédents, immédiatement exprimées au moyen de ces mêmes variables, elles sont nommées *fonctions explicites*. Mais, lorsqu'on donne seulement les relations entre les fonctions et les variables, c'est-à-dire les équations auxquelles ces quantités doivent satisfaire, tant que ces équations ne sont pas résolues algébriquement, les fonctions, n'étant pas exprimées immédiatement au moyen des variables, sont appelées *fonctions implicites*. Pour les rendre explicites, il suffit de résoudre, lorsque cela se peut, les équations qui les déterminent. Par exemple, soit y une fonction implicite de x déterminée par l'équation

$$Ly = x.$$

Si l'on nomme A la base du système de logarithmes que l'on considère, la même fonction devenue explicite par la résolution de l'équation donnée sera

$$y = A^x.$$

Soit maintenant y une fonction de x, qui, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, admette constamment une valeur unique et finie. *La fonction y sera* CONTINUE *par rapport à x entre les limites données, si entre ces limites un accroissement infiniment petit de la variable x produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.* On dit encore que la fonction y est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction *continue* de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre