SECONDE SÉRIE.

I. — MÉMOIRES PUBLIÉS DANS DIVERS RECUEILS
AUTRES QUE CEUX DE L'ACADÉMIE.

II. — OUVRAGES CLASSIQUES.

III. — MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.

IV. — MÉMOIRES PUBLIÉS SÉPARÉMENT.

III.

MÉMOIRES

PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.

EXERCICES

DE

MATHÉMATIQUES

(ANCIENS EXERCICES).

ANNÉE 1828.

DEUXIÈME ÉDITION

RÉIMPRIMÉE

D'APRÈS LA PREMIÈRE ÉDITION

EXERCICES

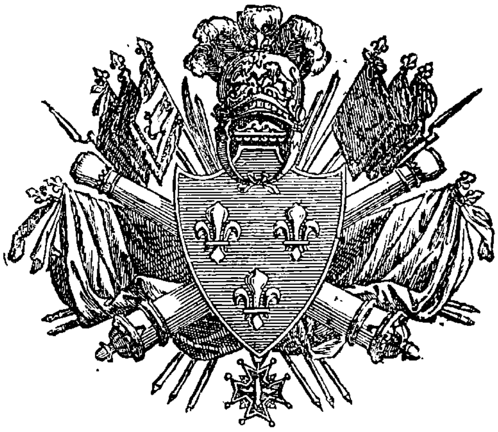
DE

MATHÉMATIQUES,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.

TROISIÈME ANNÉE.



A PARIS,

CHEZ DE BURE FRÈRES, LIBRAIRES DU ROI ET DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI

RUE SERPENTE, N° 7.

1828.

EXERCICES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR

LES CENTRES, LES PLANS PRINCIPAUX ET LES AXES PRINCIPAUX

DES

SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

Parmi les méthodes employées par les géomètres pour discuter les surfaces représentées par des équations du second degré, l'une des plus simples est celle qui consiste à couper ces surfaces par des droites parallèles. En suivant cette méthode, on peut facilement déterminer la nature des surfaces dont il s'agit, leurs centres, s'il en existe, leurs axes principaux, etc.; et l'on reconnaît, en particulier, que, pour fixer la direction de ces axes, il suffit de résoudre une équation du troisième degré. Cette équation, qui se représente dans diverses questions de Géométrie ou de Mécanique, et, en particulier, dans la théorie des moments d'inertie, a cela de remarquable que ses trois racines sont toujours réelles. Mais jusqu'à présent on n'avait prouvé cette réalité qu'à l'aide de moyens indirects, par exemple, en ayant recours à la transformation des coordonnées, ou en faisant voir que l'on parviendrait à des conclusions absurdes, si l'on supposait deux racines imaginaires. Je me propose, dans cet article : 1° de montrer combien il est facile de fixer, par la méthode ci-dessus mentionnée, la position du centre, des plans principaux et des axes principaux d'une surface du second degré, lorsque, pour simplifier les calculs et les rendre plus symétriques, on écrit les équations de chaque droite sous la forme indiquée dans les Leçons sur les *Applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie;* 2° d'établir directement la réalité des trois racines de l'équation qui sert à la détermination des axes principaux.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point, rapportées à trois axes rectangulaires. L'équation générale du second degré en x, y, z sera de la forme

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}z^2+2\mathrm{D}yz+2\mathrm{E}zx+2\mathrm{F}xy+2\mathrm{G}x+2\mathrm{H}y+2\mathrm{I}z=\mathrm{K}; \tag{1}$$

et les équations d'une droite menée par le point (ξ, η, ζ), de manière qu'elle fasse, avec les demi-axes des coordonnées positives, les angles α, β, γ, seront comprises dans la formule

$$\frac{x-\xi}{\cos\alpha}=\frac{y-\eta}{\cos\beta}=\frac{z-\zeta}{\cos\gamma}. \tag{2}$$

De plus, si l'on fait, pour abréger,

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}, \tag{3}$$

c'est-à-dire si l'on désigne par r la distance des deux points (ξ, η, ζ), (x, y, z), on tirera de la formule (2)

$$\frac{x-\xi}{\cos\alpha}=\frac{y-\eta}{\cos\beta}=\frac{z-\zeta}{\cos\gamma}=\pm r, \tag{4}$$

le double signe devant être réduit au signe $+$ ou au signe $-$, suivant que les angles α, β, γ se rapporteront à la longueur r comptée à partir du point (ξ, η, ζ), ou à partir du point (x, y, z). On aura donc, dans le premier cas,

$$x=\xi+r\cos\alpha, \qquad y=\eta+r\cos\beta, \qquad z=\zeta+r\cos\gamma, \tag{5}$$

et, dans le second,

$$x=\xi-r\cos\alpha, \qquad y=\eta-r\cos\beta, \qquad z=\zeta-r\cos\gamma. \tag{6}$$

Concevons à présent que la droite, étant prolongée à partir du point (ξ, η, ζ), de manière à former avec les demi-axes des coordonnées positives les angles α, β, γ, rencontre précisément la surface (1) au point (x, y, z). Les valeurs de x, y, z, données par les équations (5), vérifieront la formule (1). Donc, si l'on pose

$$(7) \quad \left\{\begin{aligned} s &= \mathrm{A}\cos^2\alpha + \mathrm{B}\cos^2\beta + \mathrm{C}\cos^2\gamma + 2\mathrm{D}\cos\beta\cos\gamma + 2\mathrm{E}\cos\gamma\cos\alpha + 2\mathrm{F}\cos\alpha\cos\beta, \\ t &= (\mathrm{A}\xi + \mathrm{F}\eta + \mathrm{E}\zeta + \mathrm{G})\cos\alpha + (\mathrm{F}\xi + \mathrm{B}\eta + \mathrm{D}\zeta + \mathrm{H})\cos\beta + (\mathrm{E}\xi + \mathrm{D}\eta + \mathrm{C}\zeta + \mathrm{I})\cos\gamma, \\ u &= \mathrm{A}\xi^2 + \mathrm{B}\eta^2 + \mathrm{C}\zeta^2 + 2\mathrm{D}\eta\zeta + 2\mathrm{E}\zeta\xi + 2\mathrm{F}\xi\eta + 2\mathrm{G}\xi + 2\mathrm{H}\eta + 2\mathrm{I}\zeta, \end{aligned}\right.$$

la distance r sera déterminée en fonction des angles α, β, γ et des coordonnées ξ, η, ζ par l'équation du second degré

$$(8) \qquad sr^2 + 2tr + u = \mathrm{K}.$$

Or, cette équation devant fournir, par hypothèse, une valeur réelle et positive de r, on peut affirmer qu'elle admettra deux racines réelles, à moins que les angles α, β, γ ne vérifient la condition $s = 0$ ou

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}\cos^2\alpha + \mathrm{B}\cos^2\beta + \mathrm{C}\cos^2\gamma \\ &\quad + 2\mathrm{D}\cos\beta\cos\gamma + 2\mathrm{E}\cos\gamma\cos\alpha + 2\mathrm{F}\cos\alpha\cos\beta = 0, \end{aligned}\right.$$

Si cette condition n'est pas remplie, une seconde valeur réelle de r, positive ou négative, satisfera encore à l'équation (8). En d'autres termes, une seconde valeur positive de r vérifiera l'équation (8) ou la suivante

$$(10) \qquad sr^2 - 2tr + u = \mathrm{K}.$$

Par conséquent, la droite que nous avons déjà considérée, et qui se trouve représentée par les équations (5) ou par les équations (6), suivant qu'on la suppose prolongée dans un certain sens ou en sens contraire, rencontrera de nouveau la surface (1). Si maintenant on fait coïncider le point (ξ, η, ζ) avec le milieu de la distance comprise entre les points d'intersection de la droite et de la surface, r sera la moitié de cette distance; et, comme les formules (8), (10) devront subsister simultanément, on en conclura

$$sr^2 + u = K \tag{11}$$

et

$$t = 0. \tag{12}$$

Il est bon d'observer que l'équation (12) peut s'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}&(A\xi + F\eta + E\zeta + G)\cos\alpha \\ &\quad + (F\xi + B\eta + D\zeta + H)\cos\beta + (E\xi + D\eta + C\zeta + I)\cos\gamma = 0,\end{aligned}\right. \tag{13}$$

$$\left\{\begin{aligned}&(A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma)\xi + (F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma)\eta \\ &\quad + (E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma)\zeta + G\cos\alpha + H\cos\beta + I\cos\gamma = 0.\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Cette équation étant du premier degré par rapport aux coordonnées ξ, η, ζ, il en résulte que le point (ξ, η, ζ) décrira une surface plane, si la sécante de la surface (1) devient mobile, mais de telle sorte que les angles α, β, γ demeurent constants. Ainsi, des cordes parallèles de la surface (1) ont toujours leurs milieux situés dans un seul plan que l'on peut appeler *diamétral*, et qui se trouve représenté par l'équation (13) ou (14). Soient λ, μ, ν les angles que forme la perpendiculaire à ce plan, prolongé dans un sens ou dans un autre, avec les demi-axes des coordonnées positives. Les cosinus de ces angles étant nécessairement proportionnels aux coefficients de ξ, η, ζ dans l'équation (14), on aura

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma}{\cos\lambda} \\ &= \frac{F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma}{\cos\mu} \\ &= \frac{E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma}{\cos\nu}.\end{aligned}\right. \tag{15}$$

De plus, les trois fractions que renferme la formule (15), étant égales entre elles, seront égales au rapport

$$\frac{(A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma)\cos\alpha + (F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma)\cos\beta + (E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma)\cos\gamma}{\cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma},$$

et, par conséquent, à

$$\frac{s}{\cos\delta},$$

si l'on pose

$$\cos\delta = \cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma, \tag{16}$$

c'est-à-dire si l'on désigne par δ l'un des deux angles que forme une des cordes parallèles avec la perpendiculaire au plan diamétral qui passe par leurs milieux. On aura donc encore

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma}{\cos\lambda}\\ &= \frac{F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma}{\cos\mu}\\ &= \frac{E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma}{\cos\nu} = \frac{s}{\cos\delta}, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

et, par suite, l'équation du plan diamétral ou l'équation (14) pourra être réduite à

$$s(\xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu) + (G\cos\alpha + H\cos\beta + I\cos\gamma)\cos\delta = 0. \tag{18}$$

Lorsque les cordes de la surface (1) deviennent parallèles à l'un des axes coordonnés, l'une des trois quantités $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se réduit à ± 1, les deux autres s'évanouissent, et l'équation (13) du plan diamétral prend une des trois formes

$$A\xi + F\eta + E\zeta + G = 0, \tag{19}$$

$$F\xi + B\eta + D\zeta + H = 0, \tag{20}$$

$$E\xi + D\eta + C\zeta + I = 0. \tag{21}$$

Ces trois dernières équations représentent donc les trois plans diamétraux qui passent par les milieux des cordes parallèles aux axes des x, y et z. Lorsque ces trois plans se coupent en un même point, ou suivant une même droite, les coordonnées de ce point ou de cette droite vérifient évidemment la formule (13), quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées aux angles α, β, γ. Donc tous les plans diamétraux passent alors par ce point ou cette droite, qui est le *centre* ou le lieu des *centres* de la surface (1).

Pour qu'un plan diamétral coupe à angles droits les cordes parallèles dont il renferme les milieux, ou, en d'autres termes, pour qu'un plan diamétral divise la surface (1) en deux parties symétriques, et devienne ce qu'on nomme un plan *principal* de cette surface, il est nécessaire et il suffit que les cosinus des angles λ, μ, ν soient proportionnels aux cosinus des angles α, β, γ, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\alpha}=\frac{\cos\mu}{\cos\beta}=\frac{\cos\nu}{\cos\gamma}. \tag{22}$$

D'ailleurs, si l'on combine la formule (15) avec la première des équations (7) et avec la suivante

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \tag{23}$$

on en conclura

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{A\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma}{\cos\alpha}\\ &=\frac{F\cos\alpha+B\cos\beta+D\cos\gamma}{\cos\beta}\\ &=\frac{E\cos\alpha+D\cos\beta+C\cos\gamma}{\cos\gamma}=s \end{aligned}\right. \tag{24}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\begin{aligned} &(A-s)\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma=0,\\ &F\cos\alpha+(B-s)\cos\beta+D\cos\gamma=0,\\ &E\cos\alpha+D\cos\beta+(C-s)\cos\gamma=0. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

De plus, si l'on élimine $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ entre les formules (25), on obtiendra une équation en s du troisième degré, savoir

$$(A-s)(B-s)(C-s)-D^2(A-s)-E^2(B-s)-F^2(C-s)+2DEF=0. \tag{26}$$

Enfin, si l'on pose, dans les formules (25),

$$\cos\alpha=p\cos\gamma,\qquad \cos\beta=q\cos\gamma, \tag{27}$$