EXERCICES

DE

MATHÉMATIQUES.

AVERTISSEMENT.

L'accueil favorable que les douze livraisons des *Exercices*, publiées en 1826, ont reçu des géomètres, détermine l'auteur à en faire paraître de nouvelles. Il y développera les diverses théories dont il a posé les bases dans les premières livraisons, et traitera plusieurs objets que le défaut d'espace l'avait obligé de passer sous silence. Il s'occupera particulièrement des applications de l'Analyse à la Physique, et montrera les facilités que présente à cet égard le calcul des résidus. Le premier Volume des *Exercices* faisait déjà connaître une partie des avantages que l'on peut retirer de ce calcul pour la détermination des intégrales définies, pour la sommation des suites, et pour l'intégration des équations différentielles linéaires. On verra maintenant le même calcul fournir des méthodes générales pour la solution des problèmes de Physique mathématique, et acquérir ainsi une importance qu'on aurait pu ne pas soupçonner au premier abord. Ces méthodes contribueront d'ailleurs aux progrès de l'Analyse infinitésimale et serviront, non seulement à intégrer des équations linéaires aux différences partielles, mais encore à déterminer les fonctions arbitraires introduites par l'intégration, d'après des conditions données, à développer des fonctions quelconques en séries d'exponentielles dont les exposants soient respectivement proportionnels aux diverses racines d'une équation transcendante, et à fixer des limites entre lesquelles se trouvent renfermés les restes propres à compléter ces mêmes séries.

RECHERCHE

DES

ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉQUILIBRE

POUR UN

SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS ASSUJETTIS A DES LIAISONS QUELCONQUES.

§ I. — *Considérations générales.*

On peut arriver par deux routes différentes aux équations d'équilibre de plusieurs forces dont les points d'application sont assujettis à des liaisons quelconques. Le plus souvent on déduit ces équations du principe des vitesses virtuelles. Mais on peut aussi les établir directement à l'aide de diverses méthodes, entre lesquelles je vais en signaler une qui, à cause de sa simplicité, paraît digne de fixer un moment l'attention des géomètres.

Considérons un système de points matériels A, A', A'', ... sollicités par certaines forces. Si ces points matériels sont libres et indépendants les uns des autres, il sera nécessaire pour l'équilibre que, après avoir réduit à une résultante unique toutes les forces appliquées à chaque point, on trouve chaque résultante égale à zéro. Mais, si les mêmes points sont assujettis à certaines liaisons, comme ces liaisons opposeront au mouvement du système certaines résistances, il ne sera plus nécessaire pour l'équilibre que la résultante des forces appliquées à chaque point s'évanouisse.

Il s'agit maintenant de faire voir comment on peut déduire les formules d'équilibre de la nature des liaisons supposées connues. Nous commencerons par examiner le cas particulier où il n'existe qu'une seule liaison, représentée par une seule équation entre les coordonnées des différents points. Nous traiterons ensuite le cas général où les liaisons sont en nombre quelconque.

§ II. — *Équilibre de plusieurs points assujettis à une seule liaison.*

Supposons d'abord que les différents points se trouvent assujettis à une seule liaison. Soient dans cette hypothèse

$$x,\quad y,\quad z;\qquad x',\quad y',\quad z';\qquad \ldots$$

les coordonnées rectangulaires des différents points A, A′, A″, ...;

$$\mathrm{P},\quad \mathrm{P}',\quad \mathrm{P}'',\quad \ldots$$

les forces qui leur sont appliquées, réduites pour chaque point à une résultante unique, et

$$\mathrm{L}=0$$

l'équation de condition qui exprime la liaison donnée, L étant une fonction des variables x, y, z; x', y', z', ... Je dis que l'équilibre pourra s'établir au moyen de la liaison, sans que la force P s'évanouisse, et même, en général, quelle que soit l'intensité de cette force. Pour le démontrer, commençons par imaginer que l'on fixe tous les points du système à l'exception du point A qui a pour coordonnées x, y, z, et qu'en même temps on supprime les forces P′, P″, ..., appliquées aux points A′, A″, ... Les coordonnées x, y, z demeurant seules variables dans l'équation $\mathrm{L}=0$, la liaison exprimée par cette équation n'aura plus d'autre effet que d'assujettir le point A à rester constamment sur une certaine surface courbe; et, si cette surface présente une résistance indéfinie, comme cette résistance a lieu suivant la normale, il suffira, pour que la force P ne trouble pas l'équilibre, qu'elle soit elle-même dirigée perpendiculairement à la surface. Supposons maintenant que l'on restitue au second point A′ sa mobilité primitive. L'équilibre sera troublé en général, et le système des deux points mobiles se mettra en mouvement. Mais il est clair qu'on pourra toujours empêcher ce mouvement par le moyen d'une nouvelle force P′ appliquée au point A dans une certaine direction. La force P′ étant choisie comme on vient de le dire, restituons encore au point A″ sa mobilité primitive. Pour retenir ce troisième point à sa place, il suffira évidemment de lui appliquer une troisième force P″ dans une direction déterminée. En continuant de même, on conclura définitivement que tous les points redevenus mobiles, et liés seulement par l'équation $L = 0$, pourront être maintenus en équilibre à l'aide de certaines forces P, P′, P″, ... appliquées à ces mêmes points suivant des directions données. Dans ce cas, la direction de chaque force sera perpendiculaire à la surface, que son point d'application est obligé de décrire, en vertu de l'équation $L = 0$, lorsqu'on fixe tous les autres points du système. De plus, l'intensité d'une force P pourra être choisie arbitrairement. Mais les intensités de toutes les autres forces dépendront nécessairement de l'intensité de la première.

Pour appliquer ces principes à un exemple, concevons que le système donné se compose seulement de deux points A, A′ sollicités par les forces P, P′, et liés par une droite AA′ de longueur invariable; auquel cas l'équation $L = 0$ sera de la forme

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \text{const.}$$

Alors, si l'on vient à fixer le point A′, le point A ne pourra plus se mouvoir que sur la surface d'une sphère décrite du point A′ comme centre avec la longueur AA′ pour rayon et, par suite, pour que le point A demeure en repos, la force P devra être perpendiculaire à la surface de la sphère, par conséquent dirigée suivant le rayon AA′, ou suivant son prolongement. Comme on peut faire un raisonnement semblable à l'égard de la force P′, il est permis de conclure que, dans le cas d'équilibre, chacune des forces P, P′ agira suivant la droite AA′ prolongée dans un sens ou dans un autre. De plus, afin que la tendance de cette droite au mouvement reste la même dans les deux sens, il sera évidemment nécessaire que les forces P, P′ aient les mêmes intensités et agissent en sens contraires. Réciproquement, si les forces

P, P′ sont égales et agissent en sens contraires suivant la droite AA′, il est clair qu'elles se feront équilibre aux extrémités de cette droite.

Revenons maintenant au cas où plusieurs points A, A′, A″, ... se trouvent assujettis à une liaison représentée par l'équation

$$L = 0. \tag{1}$$

Soient toujours $x, y, z; x', y', z', \ldots$ les coordonnées de ces points; P, P′, P″, ... les forces qui leur sont appliquées, et désignons par

$$X, \quad Y, \quad Z; \qquad X', \quad Y', \quad Z'; \qquad \ldots$$

les projections algébriques des forces P, P′, P″, ... sur les axes des x, des y et des z. Chaque force devant être perpendiculaire à la surface que son point d'application est assujetti à décrire, en vertu de la liaison $L = 0$, lorsque tous les autres points deviennent fixes, on aura nécessairement

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{X}{\left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)} = \dfrac{Y}{\left(\dfrac{\partial L}{\partial y}\right)} = \dfrac{Z}{\left(\dfrac{\partial L}{\partial z}\right)}, \\ \dfrac{X'}{\left(\dfrac{\partial L}{\partial x'}\right)} = \dfrac{Y'}{\left(\dfrac{\partial L}{\partial y'}\right)} = \dfrac{Z'}{\left(\dfrac{\partial L}{\partial z'}\right)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}\right. \tag{2}$$

et par suite

$$\left\{\begin{array}{lll} X = \lambda \dfrac{\partial L}{\partial x}, & Y = \lambda \dfrac{\partial L}{\partial y}, & Z = \lambda \dfrac{\partial L}{\partial z}; \\ X' = \lambda' \dfrac{\partial L}{\partial x'}, & Y' = \lambda' \dfrac{\partial L}{\partial y'}, & Z' = \lambda' \dfrac{\partial L}{\partial z'}; \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots; \end{array}\right. \tag{3}$$

$\lambda, \lambda', \ldots$ désignant des coefficients dont le premier dépendra de l'intensité de la force P, le second de l'intensité de la force P′, ... De plus, comme l'intensité de la force P est une quantité arbitraire, mais de laquelle dépendent nécessairement les intensités des forces P′, P″, ..., il est clair qu'on pourra choisir à volonté la valeur du coefficient λ, mais que, la valeur de λ étant donnée, celles de $\lambda', \lambda'', \ldots$ devront s'en déduire immédiatement. Pour découvrir la relation qui existe entre λ' et λ, supposons que tous les points deviennent fixes à l'exception des deux points A, A'. Alors, ces deux derniers points restant seuls mobiles, si la liaison $L = 0$ a pour effet de les maintenir constamment à la même distance l'un de l'autre, il faudra que les forces P, P' soient égales et dirigées en sens contraires, ou, en d'autres termes, que l'on ait

$$X' = -X, \qquad Y' = -Y, \qquad Z' = -Z. \tag{4}$$

Or, dans la même hypothèse, l'équation $L = 0$ se réduisant à la forme

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \text{const.},$$

on en conclura

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = -\frac{\partial L}{\partial x}, \qquad \frac{\partial L}{\partial y'} = -\frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{\partial L}{\partial z'} = -\frac{\partial L}{\partial z}. \tag{5}$$

Par suite, les formules (3) donneront

$$\left\{\begin{aligned} X &= \lambda\frac{\partial L}{\partial x}, & Y &= \lambda\frac{\partial L}{\partial y}, & Z &= \lambda\frac{\partial L}{\partial z}, \\ X' &= -\lambda'\frac{\partial L}{\partial x}, & Y' &= -\lambda'\frac{\partial L}{\partial y}, & Z' &= -\lambda'\frac{\partial L}{\partial z}; \end{aligned}\right. \tag{6}$$

et les valeurs de X, Y, Z; X', Y', Z' satisferont aux équations (4), si l'on a

$$\lambda' = \lambda. \tag{7}$$

Supposons maintenant que, dans le cas où les points A, A' restent seuls mobiles, la liaison

$$L = 0 \tag{8}$$

n'oblige plus ces deux points à rester constamment à la même distance l'un de l'autre. On pourra joindre à la liaison $L = 0$ celles qu'on établit entre les deux points, en les unissant par une droite invariable, et fixant le milieu de cette droite. Cela posé, si l'on désigne par a, b, c les coordonnées du point milieu, et par $\mathscr{L}$ la longueur de la droite, on aura, entre les six variables

$$x, \quad y, \quad z; \qquad x', \quad y', \quad z',$$

les cinq équations

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{L} = 0; \\ x + x' = 2a, \qquad y + y' = 2b, \qquad z + z' = 2c; \\ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \mathcal{D}^2, \end{array} \right.$$

dont la dernière peut être remplacée par la suivante :

$$(10) \qquad (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = \frac{\mathcal{D}^2}{4}.$$

En vertu des cinq équations (9), les positions des points A, A′ ne seront pas complètement déterminées; mais ils pourront décrire deux courbes correspondantes tracées sur la surface d'une même sphère, de manière à se trouver toujours situés aux extrémités d'un même diamètre. Dans ces courbes, les cordes correspondantes et, par suite, les tangentes menées par des points correspondants seront évidemment parallèles. Si l'on suppose

$$\mathrm{L} = f(x, y, z, x', y', z', \ldots),$$

la courbe décrite par le point A en particulier sera déterminée par le système des deux équations

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y, z, \ 2a - x, \ 2b - y, \ 2c - z, \ldots) = 0, \\ (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = \dfrac{\mathcal{D}^2}{4}. \end{array} \right.$$

De plus, si l'on décompose la force P en deux autres, l'une perpendiculaire à la courbe que peut décrire le point A, l'autre dirigée suivant la tangente à cette courbe, la force perpendiculaire étant incapable de produire aucun effet, on pourra en faire abstraction, et ne considérer que la force dirigée suivant la tangente. On pourra de même remplacer la force P′ par sa composante suivant la tangente à la courbe que peut décrire le point A′. Cela posé, comme les points A, A′ sont situés à l'extrémité d'une droite invariable dont le milieu est fixe, et que les tangentes menées par ces points aux courbes qu'ils peuvent décrire sont parallèles, il est clair que les forces dirigées suivant ces tangentes, pour maintenir en équilibre les points A, A′, devront être égales et agir dans le même sens; ce qui exige que les forces P, P′, respectivement multipliées par les cosinus des angles que forment leurs directions avec la direction de l'une des tangentes prolongée dans un sens déterminé, fournissent des produits égaux et de même signe. Or la tangente à la courbe que peut décrire le point A, prolongée dans un certain sens, forme avec les axes des angles qui ont pour cosinus

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},\quad \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},\quad \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

tandis que les cosinus des angles formés avec les mêmes axes par les directions des forces P, P′ sont respectivement

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}},\quad \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{P}},\quad \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{P}},$$
$$\frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{P}'},\quad \frac{\mathrm{Y}'}{\mathrm{P}'},\quad \frac{\mathrm{Z}'}{\mathrm{P}'}.$$

Par suite, les cosinus des angles compris entre la direction de la tangente et celles des forces P, P′ seront respectivement égaux, le premier à

$$\frac{\mathrm{X}\,dx+\mathrm{Y}\,dy+\mathrm{Z}\,dz}{\mathrm{P}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

et le second à

$$\frac{\mathrm{X}'\,dx+\mathrm{Y}'\,dy+\mathrm{Z}'\,dz}{\mathrm{P}'\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

En multipliant le premier par la force P, le second par la force P′ et égalant les produits, on trouvera

$$\frac{\mathrm{X}\,dx+\mathrm{Y}\,dy+\mathrm{Z}\,dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=\frac{\mathrm{X}'\,dx+\mathrm{Y}'\,dy+\mathrm{Z}'\,dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(12)\qquad \mathrm{X}\,dx+\mathrm{Y}\,dy+\mathrm{Z}\,dz=\mathrm{X}'\,dx+\mathrm{Y}'\,dy+\mathrm{Z}'\,dz.$$

Si, dans cette dernière équation, on remet pour X, Y, Z, X′, Y′, Z′ leurs valeurs tirées des formules (3), elle deviendra

$$(13)\qquad \lambda\left(\frac{\partial L}{\partial x}dx+\frac{\partial L}{\partial y}dy+\frac{\partial L}{\partial z}dz\right)=\lambda'\left(\frac{\partial L}{\partial x'}dx+\frac{\partial L}{\partial y'}dy+\frac{\partial L}{\partial z'}dz\right).$$

D'ailleurs, en différentiant la première des équations (11), on en conclut

$$(14)\qquad \frac{\partial L}{\partial x}dx+\frac{\partial L}{\partial y}dy+\frac{\partial L}{\partial z}dz=\frac{\partial L}{\partial x'}dx+\frac{\partial L}{\partial y'}dy+\frac{\partial L}{\partial z'}dz.$$

Donc, par suite, on aura généralement

$$(15)\qquad \lambda=\lambda';$$

on trouvera de même $\lambda=\lambda''$, $\lambda=\lambda'''$, ... Cela posé, les équations (3) prendront la forme

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{lll} X=\lambda\dfrac{\partial L}{\partial x}, & Y=\lambda\dfrac{\partial L}{\partial y}, & Z=\lambda\dfrac{\partial L}{\partial z}, \\ X'=\lambda\dfrac{\partial L}{\partial x'}, & Y'=\lambda\dfrac{\partial L}{\partial y'}, & Z'=\lambda\dfrac{\partial L}{\partial z'}, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

et l'on en conclura

$$(17)\qquad \frac{X}{\frac{\partial L}{\partial x}}=\frac{Y}{\frac{\partial L}{\partial y}}=\frac{Z}{\frac{\partial L}{\partial z}}=\frac{X'}{\frac{\partial L}{\partial x'}}=\frac{Y'}{\frac{\partial L}{\partial y'}}=\frac{Z'}{\frac{\partial L}{\partial z'}}=\ldots.$$

Donc, pour qu'il y ait équilibre entre les forces P, P′, P″, ..., dans le cas où leurs points d'application A, A′, A″, ... se trouvent assujettis à la seule liaison $L=0$, il est nécessaire et il suffit que les projections algébriques de ces forces sur les axes coordonnés soient respectivement proportionnelles aux dérivées de la fonction L, prises par rapport aux variables $x, y, z; x', y', z'; \ldots$. Alors, si l'on désigne par n le nombre des points A, A′, A″, ..., la formule (17) fournira $3n-1$ équations distinctes qui seront précisément les équations d'équilibre. Ajoutons que les résistances opposées par la liaison $L=0$ aux mouvements des points A, A′, A″, ... seront employées à détruire les forces