SECONDE SÉRIE.

I. — MÉMOIRES PUBLIÉS DANS DIVERS RECUEILS

AUTRES QUE CEUX DE L'ACADÉMIE.

II. — OUVRAGES CLASSIQUES.

III. — MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.

IV. — MÉMOIRES PUBLIÉS SÉPARÉMENT.

III.

MÉMOIRES

PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.

EXERCICES

DE

MATHÉMATIQUES

(ANCIENS EXERCICES).

ANNÉE 1826.

DEUXIÈME ÉDITION

RÉIMPRIMÉE

D'APRÈS LA PREMIÈRE ÉDITION.

EXERCICES

DE

MATHÉMATIQUES.

AVERTISSEMENT.

Cet Ouvrage se composera d'une suite d'articles sur les différentes parties des Sciences mathématiques. Il paraîtra par livraisons qui se succéderont à des époques peu éloignées l'une de l'autre. Dans ces articles, on se propose de passer en revue les diverses branches d'Analyse, d'éclaircir les difficultés qu'elles présentent et d'offrir de nouvelles méthodes, à l'aide desquelles on puisse traiter plus facilement des questions déjà résolues, ou résoudre celles qui ne l'étaient pas encore. Les principales applications de ces méthodes seront relatives à la Physique, à la Mécanique et à la Théorie des nombres. Parmi les objets qui seront traités dans les Exercices, on peut dès à présent indiquer :

Une formule qui fournit immédiatement une limite de la plus petite différence entre les racines d'une équation numérique, sans que l'on soit obligé de recourir à l'équation aux carrés des différences;

La théorie des *moments linéaires,* servant à simplifier l'enseignement de la Mécanique rationnelle;

Une méthode à l'aide de laquelle on peut intégrer par approximation des équations différentielles de forme quelconque, en déterminant les limites des erreurs commises;

Une nouvelle théorie du contact des courbes et des surfaces;

La théorie des intégrales définies et la recherche de formules générales qui fournissent les valeurs des intégrales définies déjà connues et d'un grand nombre d'autres;

La résolution des équations numériques par les intégrales définies;

L'intégration des équations aux différences partielles linéaires ou non linéaires;

Enfin un nouveau calcul, désigné sous le nom de *calcul des résidus,* et qui sert à sommer la série de Lagrange avec d'autres séries du même genre, ainsi qu'à établir des formules nouvelles, relatives, soit à la détermination des intégrales définies, soit à la sommation des suites ou à l'évaluation des produits composés d'un nombre infini de facteurs.

A la dernière livraison de chaque année sera jointe une Table des matières.

Cambridge University Press
978-1-108-00319-3 - Oeuvres Completes, Volume 6
Augustin Louis Cauchy
Excerpt
More information

SUR L'ANALYSE

DES SECTIONS ANGULAIRES.

Depuis quelque temps, les géomètres se sont proposé de résoudre les difficultés que peuvent offrir plusieurs formules relatives aux sections angulaires. Ces mêmes difficultés se trouvant aussi résolues par les méthodes que j'ai données dans le *Traité d'Analyse*, publié en 1821, j'ai pensé qu'on ne verrait pas sans intérêt une indication sommaire de ces méthodes, et des avantages qu'on peut en retirer.

Les expressions que l'on rencontre dans la théorie des sections angulaires sont de deux espèces. Les unes admettent des valeurs multiples : tels sont les logarithmes et les puissances fractionnaires des quantités négatives et des expressions imaginaires. D'autres n'admettent qu'une seule valeur : tels sont, le plus ordinairement, les développements en séries. Quelquefois, parmi les valeurs multiples qu'une expression présente, on rencontre une valeur particulière qui mérite d'être remarquée. Il m'a paru nécessaire de distinguer dans la notation cette valeur particulière de toutes les autres, afin d'éviter la confusion que pourrait introduire dans le calcul l'emploi de la même notation pour des usages divers. C'est pour cette raison que j'ai proposé d'entourer de doubles traits ou de doubles parenthèses les quantités comprises dans des fonctions qui admettent des valeurs multiples ; d'indiquer, par exemple, par

$$(1) \qquad l((a+b\sqrt{-1})) \quad \text{ou} \quad ((a+b\sqrt{-1}))^{\mu}$$

l'un quelconque des logarithmes de l'expression imaginaire $a+b\sqrt{-1}$, ou l'une de ses puissances fractionnaires du degré $\mu = \pm \frac{m}{n}$; et de réserver les notations

$$(2) \qquad l(a+b\sqrt{-1}), \quad (a+b\sqrt{-1})^{\mu}$$

pour indiquer un seul de ces logarithmes, ou une seule de ces puissances. Entrons, à ce sujet, dans quelques détails.

Si l'on désigne par r la racine carrée positive de a^2+b^2, et par θ celui des arcs, compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, qui a pour tangente le rapport $\frac{b}{a}$, on aura généralement, pour des valeurs positives de a,

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &l((a+b\sqrt{-1})) = l(r)+\theta\sqrt{-1}+l((1)),\\ &((a+b\sqrt{-1}))^{\mu} = r^{\mu}(\cos\mu\theta+\sqrt{-1}\sin\mu\theta)((1))^{\mu}; \end{aligned} \right.$$

tandis qu'on aura, pour des valeurs négatives de a,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &l((a+b\sqrt{-1})) = l(r)+\theta\sqrt{-1}+l((-1)),\\ &((a+b\sqrt{-1}))^{\mu} = r^{\mu}(\cos\mu\theta+\sqrt{-1}\sin\mu\theta)((-1))^{\mu}. \end{aligned} \right.$$

Or, parmi les valeurs multiples de $l((1))$, il en est une qui mérite d'être remarquée, savoir la valeur réelle

$$l(1) = 0,$$

qu'il est naturel d'indiquer à l'aide de parenthèses simples. De même, parmi les valeurs multiples de $((1))^{\mu}$, il en existe une qu'il est également naturel d'indiquer à l'aide de parenthèses simples, savoir la valeur réelle

$$1^{\mu} = 1.$$

Cela posé, si l'on convient de réduire à la fois, dans les deux membres de chacune des formules (3), les parenthèses doubles à des parenthèses simples, on obtiendra les formules

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &l(a+b\sqrt{-1}) = l(r)+\theta\sqrt{-1},\\ &(a+b\sqrt{-1})^{\mu} = r^{\mu}(\cos\mu\theta+\sqrt{-1}\sin\mu\theta), \end{aligned} \right.$$

qui serviront à définir les expressions (2), mais seulement pour des valeurs positives de la constante a. Il est important de remarquer que chacune des équations (5) continuera de subsister si l'on change, dans les deux membres, le signe de $\sqrt{-1}$.

Dans le cas où a est négatif, les valeurs des expressions $l((-1))$ et $((-1))^\mu$, comprises dans les seconds membres des formules (4), sont toutes imaginaires, et l'on ne voit aucune raison pour appliquer la notation $l(-1)$ ou $(-1)^\mu$ à l'une de ces valeurs plutôt qu'à l'autre. On doit donc alors abandonner les notations $l(a+b\sqrt{-1})$, $(a+b\sqrt{-1})^\mu$, ainsi que les notations $l(-1)$ et $(-1)^\mu$. Il y a plus : l'emploi de ces notations offrirait un grave inconvénient. En effet, admettons, pour un instant, la notation $(-1)^\mu$ comme représentant la plus simple des valeurs de $((-1))^\mu$, savoir l'expression imaginaire $\cos\mu\pi+\sqrt{-1}\sin\mu\pi$; et supposons que la définition de $(a+b\sqrt{-1})^\mu$ se déduise des formules (4), quand a devient négatif, comme elle se déduisait des formules (3), quand a était positif. On aura

$$(a+b\sqrt{-1})^\mu = r^\mu(\cos\mu\theta+\sqrt{-1}\sin\mu\theta)(\cos\mu\pi+\sqrt{-1}\sin\mu\pi);$$

et cette dernière équation devra subsister en même temps que la seconde des formules (5), quand on supposera $a=0$, $b=-1$. Par suite on sera forcé d'admettre à la fois les deux équations

$$(-\sqrt{-1})^\mu = \cos\frac{\mu\pi}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\mu\pi}{2},$$

$$(-\sqrt{-1})^\mu = \left(\cos\frac{\mu\pi}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)(\cos\mu\pi+\sqrt{-1}\sin\mu\pi),$$

dont la première exclut évidemment la seconde.

Les notations

$$l(a+b\sqrt{-1}),\quad (a+b\sqrt{-1})^\mu,$$

restreintes, comme on vient de le dire, au cas où a est positif, jouissent d'une propriété très remarquable (*voir* l'*Analyse algébrique*, Chap. IX, et les 37ᵉ et 38ᵉ *Leçons du Calcul infinitésimal*). Cette propriété consiste en ce que les séries convergentes, qui fournissent les développements de $l(a+b)$ et de $(a+b)^\mu$, quand b^2 est inférieur à a^2, représentent encore les développements de $l(a+b\sqrt{-1})$ et de $(a+b\sqrt{-1})^{\mu}$, dans le cas où l'on remplace b par $b\sqrt{-1}$. Les deux expressions imaginaires

$$l(a+b\sqrt{-1}),\quad (a+b\sqrt{-1})^{\mu}$$

sont, parmi les diverses valeurs de $l((a+b\sqrt{-1}))$ et de $((a+b\sqrt{-1}))^{\mu}$, les seules qui jouissent de cette propriété. De plus, comme on a généralement, en posant $\frac{b}{a}=\mathrm{B}$,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} l(a+b\sqrt{-1}) &= l(a)+l(1+\mathrm{B}\sqrt{-1}),\\ (a+b\sqrt{-1})^{\mu} &= a^{\mu}(1+\mathrm{B}\sqrt{-1})^{\mu},\end{aligned}\right.$$

il est clair qu'on peut se contenter d'établir la propriété en question, pour le cas où l'on suppose la constante a réduite à l'unité, ainsi que je l'ai fait dans l'*Analyse algébrique*.

Je vais maintenant rappeler en peu de mots quelques applications des principes ci-dessus exposés, et quelques-unes des formules auxquelles ils conduisent.

Les équations que l'on rencontre dans l'analyse des sections angulaires sont de deux espèces. Dans quelques-unes d'entre elles, chaque membre a des valeurs multiples. Ce sont les équations les moins précises; car chaque équation de cette espèce indique seulement que l'une des valeurs du premier membre est égale à l'une des valeurs du second. On peut citer comme exemples les formules (3) et (4). Dans d'autres équations, le second membre a une valeur déterminée. Alors il n'y aurait nul avantage à placer dans le premier membre une expression dont les valeurs seraient multiples; car ce serait indiquer en quelque sorte qu'on ne sait pas quelle est celle des valeurs du premier membre qui doit être égalée au second. On sent donc alors la nécessité d'employer dans le premier membre une notation qui ne puisse s'interpréter que d'une seule manière. On remplira aisément cette condition en adoptant les notations ci-dessus mentionnées. Ainsi, par exemple, en désignant par t un arc quelconque, par μ une quantité quelconque, par z une autre quantité comprise entre les limites -1, $+1$, enfin par

$$s = \operatorname{arc\,tang} \frac{z \sin t}{1 + z \cos t}$$

un arc renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, on trouvera (*voir* l'*Analyse algébrique*, pages 295 et 296),

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &+ \frac{\mu}{1} z(\cos t + \sqrt{-1} \sin t) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2 (\cos 2t + \sqrt{-1} \sin 2t) + \ldots \\ &= [1 + z(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)]^{\mu}, \end{aligned} \right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{\mu}{1} z(\cos t + \sqrt{-1} \sin t) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2 (\cos 2t + \sqrt{-1} \sin 2t) + \ldots \\ &= (1 + 2z \cos t + z^2)^{\frac{\mu}{2}} (\cos \mu s + \sqrt{-1} \sin \mu s). \end{aligned} \right.$$

On conclut aisément de l'équation (7) ou (8) que la formule connue du binôme, savoir

$$(9)\quad (x+y)^{\mu} = x^{\mu} + \mu x^{\mu-1} y + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^{\mu-2} y^2 + \ldots = x^{\mu}\left(1 + \frac{y}{x}\right)^{\mu},$$

subsiste pour des valeurs quelconques de μ, non seulement dans le cas où x et y sont des quantités réelles dont la première est positive, mais encore dans le cas où x et y sont des expressions imaginaires, dont la première a pour partie réelle une quantité positive. On établirait avec la même facilité les formules

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &l[1 + z(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)] \\ &\quad = z(\cos t + \sqrt{-1} \sin t) - \frac{z^2}{2} (\cos 2t + \sqrt{-1} \sin 2t) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &l(1 + 2z \cos t + z^2) + \left(\operatorname{arc\,tang} \frac{z \sin t}{1 + z \cos t}\right) \sqrt{-1} \\ &= z(\cos t + \sqrt{-1} \sin t) - \ldots, \end{aligned} \right.$$

$$(12)\quad l(x+y) = l(x) + \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{3} \frac{y^3}{x^3} - \ldots,$$