SECONDE SÉRIE.

I. — MÉMOIRES PUBLIÉS DANS DIVERS RECUEILS
AUTRES QUE CEUX DE L'ACADÉMIE.

II. — OUVRAGES CLASSIQUES.

III. — MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.

IV. — MÉMOIRES PUBLIÉS SÉPARÉMENT.

II.

OUVRAGES CLASSIQUES.

LEÇONS

SUR LES

APPLICATIONS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

A LA GÉOMÉTRIE.

Les *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie* devaient comprendre trois Volumes dont les deux premiers seuls ont été publiés par Cauchy.

LEÇONS

SUR

LES APPLICATIONS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

A LA GÉOMÉTRIE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

INGENIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR D'ANALYSE À L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR ADJOINT À LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, CHEVALIER DE LA LEGION D'HONNEUR.

TOME PREMIER.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DE BURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1826.

AVERTISSEMENT.

CET ouvrage, destiné à faire suite au *Résumé des Leçons sur le Calcul infinitésimal*, offrira les applications de ce calcul à la géométrie. Il sera divisé en trois volumes, dont les deux premiers comprendront celles des applications géométriques du calcul différentiel et du calcul intégral qui sont relatives à la première année du Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Je publie aujourd'hui le premier volume, qui renferme les principales applications du calcul différentiel. Dans la solution des différens problèmes, j'ai cherché à concilier la rigueur des démonstrations avec la simplicité des méthodes. Lorsqu'on fait usage de coordonnées rectilignes, soit rectangulaires, soit obliques, l'un des principaux moyens d'abréger les calculs consiste à résoudre les questions proposées à l'aide de formules dont chacune exprime l'égalité de plusieurs fractions qui soient des fonctions semblables ou des fonctions symétriques des trois coordonnées. L'utilité de ces formules se fait remarquer même dans les applications de l'analyse algébrique aux problèmes qui concernent la ligne droite et le plan. C'est ce que l'on reconnaîtra sans peine en jetant les yeux sur les Préliminaires placés en tête de l'ouvrage.

On trouvera dans la neuvième, la vingt-unième et la vingt-deuxième Leçon, une nouvelle théorie des contacts des courbes et des surfaces courbes, qui a l'avantage de reposer sur des définitions indépendantes du système de coordonnées que l'on adopte, et de présenter en même temps une idée très-nette du rapprochement plus ou moins considérable de deux courbes ou de deux surfaces qui ont entre elles un contact d'un ordre plus ou moins élevé.

Du reste, en composant cet ouvrage, j'ai mis à profit les travaux des géomètres qui ont écrit sur le même sujet, ainsi que les lumières de MM. AMPÈRE et CORIOLIS. Je dois à ce dernier, entre autres choses, la définition que j'ai donnée, dans la dix-septième Leçon, du rayon de courbure d'une courbe quelconque; et c'est d'après ses conseils que j'ai placé la théorie du cercle osculateur avant celle des contacts des divers ordres.

LEÇONS

SUR LES

APPLICATIONS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

A LA GÉOMÉTRIE.

PRÉLIMINAIRES.

REVUE DE QUELQUES FORMULES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Avant d'exposer les applications géométriques du Calcul infinitésimal, il sera fort utile d'établir quelques notions et quelques formules préliminaires : tel est l'objet dont nous allons d'abord nous occuper.

Nous déterminerons ordinairement la position d'un point dans l'espace à l'aide de trois *coordonnées rectilignes* x, y, z, relatives à trois axes des x, des y et des z, passant par l'*origine* des coordonnées, et formés par les intersections mutuelles des trois *plans coordonnés* des y, z, des z, x, et des x, y. Ces coordonnées seront *rectangulaires* lorsque les trois axes seront perpendiculaires entre eux.

Nous nommerons *axe* une droite menée par un point quelconque de l'espace, et prolongée indéfiniment dans les deux sens; et nous dirons qu'un axe de cette espèce se divise en deux *demi-axes* aboutissant au point que l'on considère, et dont chacun se prolonge indéfiniment dans un seul sens. Par conséquent, chacun de ces deux demi-axes aura toujours une direction déterminée. Si l'on considère en particulier les trois axes des x, y, z, chacun d'eux sera divisé, à l'origine, en deux demi-axes, sur l'un desquels se compteront les coordonnées positives, tandis que l'on comptera sur l'autre les coordonnées négatives.

D'après ces définitions, il est clair que, si l'on tient compte seulement des angles qui renferment au plus 200 degrés (*nouvelle division*), deux axes ou deux droites, tracés de manière à se couper, comprendront toujours entre eux deux angles, l'un aigu, l'autre obtus, tandis que deux directions ou deux demi-axes, aboutissant à un point donné, formeront un seul angle, tantôt aigu, tantôt obtus. Lorsque deux directions ou deux demi-axes aboutiront à deux points différents de l'espace, ils seront censés former entre eux le même angle que formeraient deux demi-axes parallèles et prolongés dans les mêmes sens à partir d'un point unique. Cela posé, l'angle que deux directions formeront entre elles sera toujours complètement déterminé, et l'on pourra en dire autant des angles formés par une direction avec les demi-axes des coordonnées positives.

Concevons maintenant que, par un point O pris à volonté dans l'espace, on ait mené deux demi-axes $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, et qu'un rayon mobile, d'une longueur indéfinie, aboutissant au point O, tourne, dans le plan de ces deux demi-axes, avec un mouvement de rotation en vertu duquel il décrive l'angle AOB, en passant de la position $\overline{OA}$ à la position $\overline{OB}$. Supposons de plus que, par le point O, on ait élevé un troisième demi-axe situé hors du plan OAB. Un spectateur qui posera les pieds sur le plan, de manière à s'appuyer contre le demi-axe, verra le rayon vecteur se mouvoir, en passant devant lui, de sa droite à sa gauche ou de sa gauche à sa droite, ce que nous exprimerons en disant que le mouvement de rotation a lieu de *droite à gauche* ou de *gauche à droite* (1). On doit observer, au reste, que, si par le point O on élevait à la fois deux demi-axes situés, le premier d'un côté du plan, le second de l'autre côté, le même mouvement de rota-

(1) Le moyen que nous employons ici, et à l'aide duquel on distingue facilement les deux espèces de mouvements de rotation que peut prendre un plan tournant sur lui-même autour d'un point donné, est celui dont M. Ampère a fait usage dans la *Théorie de l'Électricité dynamique*.

tion paraîtrait s'effectuer autour de l'un de ces demi-axes de droite à gauche, et autour de l'autre de gauche à droite.

Considérons à présent un angle solide trièdre qui ait pour arêtes trois demi-axes, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, aboutissant au point O; et concevons qu'un rayon mobile, d'une longueur indéfinie, mené par le point O, fasse le tour de l'angle solide en s'appliquant successivement sur les trois faces AOB, BOC, COA. Son mouvement de rotation sur chaque face sera un mouvement de rotation de droite à gauche ou de gauche à droite autour de l'arête située hors du plan de cette face. De plus, il est facile de voir que les trois mouvements sur les trois faces seront de même espèce. Supposons, par exemple, que les trois demi-axes dont il s'agit se réduisent aux demi-axes des coordonnées positives et coïncident avec les directions $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$. Si la disposition de ces demi-axes est celle que l'on adopte le plus ordinairement, les trois mouvements de rotation auront lieu de droite à gauche autour de ces trois demi-axes, lorsque le rayon mobile, en faisant le tour de l'angle solide, passera successivement de la position $\overline{OX}$ à la position $\overline{OY}$, et de celle-ci à la position $\overline{OZ}$. Si le demi-axe des z positives était transporté de l'autre côté du plan des x, y, alors les mouvements de rotation de droite à gauche auraient lieu dans le cas où le rayon mobile prendrait successivement les trois positions

$$\overline{OX},\quad \overline{OZ},\quad \overline{OY},$$

pour revenir ensuite directement de la position $\overline{OY}$ à la position $\overline{OX}$.

Afin de bien distinguer les deux espèces de mouvements que peut prendre un rayon mobile assujetti à passer par l'origine et à parcourir successivement les trois faces de l'angle solide OXYZ, nous dirons que ce rayon mobile a, dans chacun des plans coordonnés, un mouvement *direct* de rotation, s'il passe successivement de la position $\overline{OX}$ à la position $\overline{OY}$, et de celle-ci à la position $\overline{OZ}$. Nous dirons, dans le cas contraire, que le même rayon vecteur a un mouvement de rotation *rétrograde*. En conséquence, si l'on adopte la disposition la plus ordinaire pour les demi-axes des coordonnées positives, les mouve-