# COURS D'ANALYSE

DE

# L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

## PRÉLIMINAIRES.

REVUE DES DIVERSES ESPÈCES DE QUANTITÉS RÉELLES QUE L'ON PEUT CONSIDÉRER, SOIT EN ALGÈBRE, SOIT EN TRIGONOMÉTRIE, ET DES NOTATIONS A L'AIDE DESQUELLES ON LES REPRÉSENTE. — DES MOYENNES ENTRE PLUSIEURS QUANTITÉS.

Pour éviter toute espèce de confusion dans le langage et l'écriture algébriques, nous allons fixer dans ces préliminaires la valeur de plusieurs termes et de plusieurs notations que nous emprunterons soit à l'Algèbre ordinaire, soit à la Trigonométrie. Les explications que nous donnerons à ce sujet sont nécessaires, pour que nous ayons la certitude d'être parfaitement compris de ceux qui liront cet Ouvrage. Nous allons indiquer d'abord quelle idée il nous paraît convenable d'attacher à ces deux mots, *nombre* et *quantité*.

Nous prendrons toujours la dénomination de *nombres* dans le sens où on l'emploie en Arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs, et nous appliquerons uniquement la dénomination de *quantités* aux quantités *réelles positives* ou *négatives*, c'est-à-dire aux nombres précédés des signes + ou −. De plus, nous regarderons les quantités comme destinées à exprimer des accroissements ou des diminutions; en sorte qu'une grandeur donnée sera simplement représentée par un nombre, si l'on se contente de la comparer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité, et par ce nombre précédé du signe + ou du signe −, si on la considère comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une grandeur fixe de la même espèce. Cela posé, le signe + ou — placé devant un nombre en modifiera la signification, à peu près comme un adjectif modifie celle du substantif. Nous appellerons *valeur numérique* d'une quantité le nombre qui en fait la base, quantités *égales* celles qui ont le même signe avec la même valeur numérique, et quantités *opposées* deux quantités égales quant à leurs valeurs numériques, mais affectées de signes contraires. En partant de ces principes, il est facile de rendre compte des diverses opérations que l'on peut faire subir aux quantités. Par exemple, deux quantités étant données, on pourra toujours en trouver une troisième qui, prise pour accroissement d'un nombre fixe, si elle est positive, et pour diminution dans le cas contraire, conduise au même résultat que les deux quantités données, employées l'une après l'autre à pareil usage. Cette troisième quantité, qui à elle seule produit le même effet que les deux autres, est ce qu'on appelle leur *somme*. Ainsi les deux quantités $-10$ et $+7$ ont pour somme $-3$, attendu qu'une diminution de 10 unités, jointe à une augmentation de 7 unités, équivaut à une diminution de 3 unités. *Ajouter* deux quantités, c'est former leur somme. La différence entre une première quantité et une seconde, c'est une troisième quantité qui, ajoutée à la seconde, reproduit la première. Enfin, on dit qu'une quantité est *plus grande* ou *plus petite* qu'une autre, suivant que la différence de la première à la seconde est positive ou négative. D'après cette définition, les quantités positives surpassent toujours les quantités négatives, et celles-ci doivent être considérées comme d'autant plus petites que leurs valeurs numériques sont plus grandes.

En Algèbre, on représente, non seulement les nombres, mais aussi les quantités, par des lettres. Comme on est convenu de ranger les nombres absolus dans la classe des quantités positives, on peut désigner la quantité positive qui a pour valeur numérique le nombre A, soit par $+A$, soit par A seulement, tandis que la quantité négative opposée se trouve représentée par $-A$. De même, dans le cas où la lettre $a$ représente une quantité, on est convenu de regarder comme synonymes les deux expressions $a$ et $+a$, et de représenter par $-a$ la quantité opposée à $+a$. Ces remarques suffisent pour établir ce qu'on appelle la *règle des signes* (*voir* la Note I).

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On désigne une semblable quantité par une lettre prise ordinairement parmi les dernières de l'alphabet. On appelle au contraire quantité *constante*, et l'on désigne ordinairement par une des premières lettres de l'alphabet toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En Géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus, etc.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité *infiniment petite*. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent de plus en plus, de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné, on dit que cette variable a pour limite l'*infini positif*, indiqué par le signe $\infty$, s'il s'agit d'une variable positive, et l'*infini négatif*, indiqué par la notation $-\infty$, s'il s'agit d'une variable négative. Les infinis positif et négatif sont désignés conjointement sous le nom de *quantités infinies*.

Les quantités qui se présentent, dans le calcul, comme résultats d'opérations faites sur une ou plusieurs autres quantités constantes ou variables, peuvent être divisées en plusieurs espèces suivant la nature des opérations qui les produisent. C'est ainsi que l'on distingue, en Algèbre, les sommes et différences, les produits et quotients, les puissances et racines, les exponentielles et les logarithmes; en Trigonométrie, les sinus et cosinus, sécantes et cosécantes, tangentes et cotangentes, et les arcs de cercle dont une ligne trigonométrique est donnée. Pour bien comprendre ce qui est relatif à ces dernières espèces de quantités, il est nécessaire de se rappeler les principes suivants.

Une longueur, comptée sur une ligne droite ou courbe, peut être, comme toute espèce de grandeurs, représentée soit par un nombre, soit par une quantité, savoir : par un nombre, lorsqu'on a simplement égard à la mesure de cette longueur, et par une quantité, c'est-à-dire par un nombre précédé du signe + ou —, lorsque l'on considère la longueur dont il s'agit comme portée, à partir d'un point fixe, sur la ligne donnée dans un sens ou dans un autre, pour servir soit à l'augmentation, soit à la diminution d'une autre longueur constante aboutissant à ce point fixe. Le point fixe dont il est ici question, et à partir duquel on doit porter les longueurs variables désignées par des quantités, est ce qu'on appelle l'*origine* de ces mêmes longueurs. Deux longueurs comptées à partir d'une origine commune, mais en sens contraires, doivent être représentées par des quantités de signes différents. On peut choisir à volonté le sens dans lequel on doit compter les longueurs désignées par des quantités positives; mais, ce choix une fois fait, il faudra nécessairement compter dans le sens opposé les longueurs qui seront désignées par des quantités négatives.

Dans un cercle dont le plan est supposé vertical, on prend ordinairement pour origine des arcs l'extrémité du rayon tiré horizontalement de gauche à droite, et c'est en s'élevant au-dessus de ce point que l'on compte les arcs positifs, c'est-à-dire ceux que l'on désigne par des quantités positives. Dans le même cercle, lorsque le rayon se réduit à l'unité, le sinus d'un arc, c'est-à-dire la projection sur le diamètre vertical du rayon qui passe par l'extrémité de cet arc, se compte positivement de bas en haut et négativement en sens contraire, à partir du centre du cercle pris pour origine des sinus. La tangente se compte positivement dans le même sens que le sinus, mais à partir de l'origine des arcs et sur la verticale menée par cette origine. Enfin, la sécante se compte à partir du centre sur le rayon mené à l'extrémité de l'arc que l'on considère, et positivement dans le sens de ce rayon.

Souvent le résultat d'une opération effectuée sur une quantité peut avoir plusieurs valeurs différentes les unes des autres. Lorsque nous voudrons désigner indistinctement une quelconque de ces valeurs, nous nous servirons de notations dans lesquelles la quantité sera entourée de doubles traits ou de doubles parenthèses, et nous réserverons la notation ordinaire pour la valeur la plus simple ou celle qui paraîtra mériter davantage d'être remarquée. Ainsi, par exemple, $a$ étant une quantité positive, la racine carrée de cette quantité aura deux valeurs numériquement égales, mais de signes contraires, dont l'une quelconque sera exprimée par la notation

$$((a))^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\sqrt{a}},$$

tandis que la valeur positive seule sera représentée par

$$a^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{a};$$

en sorte qu'on aura

(1) $$\sqrt{\sqrt{a}} = \pm\sqrt{a}$$

ou, ce qui revient au même,

(2) $$((a))^{\frac{1}{2}} = \pm a^{\frac{1}{2}}.$$

De même encore, si l'on représente par $a$ une quantité positive ou négative, la notation

$$\text{arc sin}((a)) \quad \text{ou} \quad \text{arc tang}((a))$$

désignera un quelconque des arcs qui ont la quantité $a$ pour sinus ou pour tangente, tandis que la notation

$$\text{arc sin}(a) \quad \text{ou} \quad \text{arc tang}(a)$$

indiquera seulement celui de ces arcs qui a la plus petite valeur numérique. A l'aide de ces conventions, on évite la confusion que pourrait entraîner l'emploi de signes dont la valeur n'aurait pas été déterminée d'une manière assez précise. Afin de lever à cet égard toute difficulté, je vais présenter ici le Tableau des notations dont nous ferons usage pour exprimer les résultats des opérations algébriques ou trigonométriques.

La somme de deux quantités sera indiquée à l'ordinaire par la juxtaposition de ces deux quantités, chacune d'elles étant exprimée par une lettre précédée du signe $+$ ou $-$, que l'on pourra supprimer (si c'est le signe $+$) devant la première lettre seulement. Ainsi

$$+a+b \quad \text{ou simplement} \quad a+b$$

désignera la somme des deux quantités $+a$, $+b$, et

$$+a-b \quad \text{ou simplement} \quad a-b$$

désignera la somme des deux quantités $+a$, $-b$, équivalente à la différence des deux quantités $+a$, $+b$.

On indiquera l'égalité des deux quantités $a$ et $b$ par le signe $=$ interposé entre elles, comme il suit,

$$a=b,$$

et l'on exprimera que la première surpasse la seconde, c'est-à-dire que la différence $a-b$ est positive, en écrivant

$$a>b \quad \text{ou} \quad b<a.$$

Nous représenterons encore à l'ordinaire par

$$+a\times+b, \quad \text{ou simplement} \quad a.b \quad \text{ou} \quad ab$$

le produit des deux quantités $+a$, $+b$, et par

$$\frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad a:b$$

leur quotient.

Soient maintenant $m$ et $n$ deux nombres entiers, A un nombre quelconque, et $a$, $b$ deux quantités quelconques positives ou négatives.

$$\mathrm{A}^m, \quad \mathrm{A}^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\mathrm{A}}, \quad \mathrm{A}^{\pm\frac{m}{n}}, \quad \mathrm{A}^b$$

représenteront les quantités positives qu'on obtient en élevant le nombre A à des puissances respectivement marquées par les exposants

$$m, \quad \frac{1}{n}, \quad \pm\frac{m}{n}, \quad b,$$

et

$$a^{\pm m}$$

la quantité positive ou négative que produit l'élévation de la quantité $a$ à la puissance $\pm m$. Quant aux notations

$$((a))^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\sqrt{a}}, \qquad ((a))^{\pm\frac{m}{n}},$$

nous nous en servirons pour exprimer, non seulement les valeurs positives ou négatives, lorsqu'il en existe, des puissances de la quantité $a$ marquées par les exposants

$$\frac{1}{n}, \quad \pm\frac{m}{n},$$

mais encore les valeurs imaginaires de ces mêmes puissances (*voir* ci-après, Chap. VII, ce qu'on entend par *expressions imaginaires*). Il est bon d'observer que, si l'on désigne par A la valeur numérique de $a$, et si l'on suppose la fraction $\frac{m}{n}$ réduite à sa plus simple expression, la puissance

$$((a))^{\frac{m}{n}}$$

aura une seule valeur réelle positive ou négative, savoir

$$+\mathrm{A}^{\frac{m}{n}} \quad \text{ou} \quad -\mathrm{A}^{\frac{m}{n}},$$

lorsque $\frac{m}{n}$ sera une fraction de dénominateur impair; tandis qu'elle admettra les deux valeurs réelles dont on vient de parler, ou qu'elle n'en admettra aucune, si $\frac{m}{n}$ est une fraction de dénominateur pair. On peut faire une semblable remarque à l'égard de l'expression

$$((a))^{-\frac{m}{n}}.$$

Dans le cas particulier où, la quantité $a$ étant positive, on suppose $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$, l'expression $((a))^{\frac{m}{n}}$ n'a que deux valeurs réelles l'une et l'autre, et données par la formule (2) ou, ce qui revient au même, par la formule (1).

Les notations

$$l(\mathrm{B}),\quad \mathrm{L}(\mathrm{B}),\quad \mathrm{L}'(\mathrm{B}),\quad \ldots$$

indiqueront les logarithmes réels du nombre B dans différents systèmes, tandis que chacune des suivantes

$$l((b)),\quad \mathrm{L}((b)),\quad \mathrm{L}'((b)),\quad \ldots$$

pourra servir à désigner, outre le logarithme réel de la quantité $b$, lorsqu'il existe, un quelconque des logarithmes imaginaires de cette même quantité (*voir* ci-après, Chap. IX, ce qu'on entend par *logarithmes imaginaires*).

En Trigonométrie

$$\sin a,\quad \cos a,\quad \operatorname{tang} a,\quad \cot a,\quad \operatorname{séc} a,\quad \operatorname{coséc} a,\quad \operatorname{siv} a,\quad \operatorname{cosiv} a$$

exprimeront respectivement le *sinus*, le *cosinus*, la *tangente*, la *cotangente*, la *sécante*, la *cosecante*, le *sinus verse* ou le *cosinus verse* de l'arc $a$, et les notations

$$\operatorname{arc}\sin((a)),\quad \operatorname{arc}\cos((a)),\quad \operatorname{arc}\operatorname{tang}((a)),$$
$$\operatorname{arc}\cot((a)),\quad \operatorname{arc}\operatorname{séc}((a)),\quad \operatorname{arc}\operatorname{coséc}((a))$$

indiqueront un quelconque des arcs qui ont la quantité $a$ pour sinus, ou cosinus, ou tangente, ou cotangente, ou sécante, ou cosécante. Nous nous servirons des notations simples

$$\operatorname{arc}\sin(a),\quad \operatorname{arc}\cos(a),\quad \operatorname{arc}\operatorname{tang}(a),\quad \operatorname{arc}\cot(a),\quad \operatorname{arc}\operatorname{séc}(a),\quad \operatorname{arc}\operatorname{coséc}(a),$$

ou même, en supprimant tout à fait les parenthèses, des notations suivantes

$$\operatorname{arc}\sin a,\quad \operatorname{arc}\cos a,\quad \operatorname{arc}\operatorname{tang} a,\quad \operatorname{arc}\cot a,\quad \operatorname{arc}\operatorname{séc} a,\quad \operatorname{arc}\operatorname{coséc} a,$$

lorsque, parmi les arcs dont une ligne trigonométrique est égale à $a$, nous voudrons désigner celui qui a la plus petite valeur numérique, ou, si ces arcs sont deux à deux égaux et de signes contraires, celui qui a la plus petite valeur positive. En conséquence,

$$\operatorname{arc}\sin a,\quad \operatorname{arc}\operatorname{tang} a,\quad \operatorname{arc}\cot a,\quad \operatorname{arc}\operatorname{coséc} a$$

indiqueront des arcs positifs ou négatifs, mais compris entre les limites

$$-\frac{\pi}{2},\quad +\frac{\pi}{2},$$

$\pi$ désignant la demi-circonférence dans le cercle qui a pour rayon l'unité, tandis que

$$\operatorname{arc}\cos a,\quad \operatorname{arc}\operatorname{séc} a$$

indiqueront des arcs positifs compris entre les limites o et $\pi$.

En vertu des conventions que l'on vient d'établir, si l'on désigne par $k$ un nombre entier arbitraire, on aura évidemment, pour des valeurs quelconques positives ou négatives de la quantité $a$,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{arc}\sin((a)) = \frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\sin a\right) \pm 2k\pi,\\ &\operatorname{arc}\cos((a)) = \pm \operatorname{arc}\cos a \pm 2k\pi,\\ &\operatorname{arc}\operatorname{tang}((a)) = \operatorname{arc}\operatorname{tang} a \pm k\pi,\\ &\operatorname{arc}\cos a + \operatorname{arc}\sin a = \frac{\pi}{2},\\ &\operatorname{arc}\operatorname{coséc} a + \operatorname{arc}\operatorname{séc} a = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}\right.$$

On trouvera de plus, pour des valeurs positives de $a$,

$$(4)\qquad \operatorname{arc}\cot a + \operatorname{arc}\operatorname{tang} a = \frac{\pi}{2},$$

et, pour des valeurs négatives de $a$,

$$\text{arc}\cot a + \text{arc tang}\, a = -\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Lorsqu'une quantité variable converge vers une limite fixe, il est souvent utile d'indiquer cette limite par une notation particulière; c'est ce que nous ferons, en plaçant l'abréviation

$$\lim$$

devant la quantité variable dont il s'agit. Quelquefois, tandis qu'une ou plusieurs variables convergent vers des limites fixes, une expression qui renferme ces variables converge à la fois vers plusieurs limites différentes les unes des autres. Nous indiquerons alors une quelconque de ces dernières limites à l'aide de doubles parenthèses placées à la suite de l'abréviation lim, de manière à entourer l'expression que l'on considère. Supposons, pour fixer les idées, qu'une variable positive ou négative représentée par $x$ converge vers la limite o, et désignons par A un nombre constant : il sera facile de s'assurer que chacune des expressions

$$\lim \mathrm{A}^x, \quad \lim \sin x$$

a une valeur unique déterminée par l'équation

$$\lim \mathrm{A}^x = 1$$

ou

$$\lim \sin x = 0,$$

tandis que l'expression

$$\lim\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

admet deux valeurs, savoir, $+\infty$, $-\infty$, et

$$\lim\left(\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right)$$

une infinité de valeurs comprises entre les limites $-1$ et $+1$.

Nous allons terminer ces préliminaires en présentant, sur les quantités moyennes, plusieurs théorèmes dont la connaissance nous sera