SECONDE SÉRIE.

I. — MÉMOIRES PUBLIÉS DANS DIVERS RECUEILS

AUTRES QUE CEUX DE L'ACADÉMIE.

II. — OUVRAGES CLASSIQUES.

III. — MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.

IV. — MÉMOIRES PUBLIÉS SÉPARÉMENT.

I.

MÉMOIRES

PUBLIÉS DANS

DIVERS RECUEILS AUTRES QUE CEUX DE L'ACADÉMIE.

Cambridge University Press
978-1-108-00290-5 - Oeuvres Completes, Volume 1
Augustin Louis Cauchy
Excerpt
More information

MÉMOIRES

EXTRAITS DU

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

RECHERCHES SUR LES POLYÈDRES.

PREMIER MÉMOIRE [1].

Journal de l'École Polytechnique, XVI^e Cahier, Tome IX, p. 68 ; 1813.

Le Mémoire que j'ai l'honneur de soumettre à la Classe contient diverses recherches sur la Géométrie des solides. La première Partie offre la solution de la question proposée par M. Poinsot, sur le nombre des polyèdres réguliers que l'on peut construire ; la seconde Partie renferme la démonstration d'un théorème nouveau sur les polyèdres en général.

PREMIÈRE PARTIE.

M. Poinsot, dans son *Mémoire sur les polygones et les polyèdres*, après avoir donné la description de quatre polyèdres d'une espèce supérieure à celle que l'on a coutume de considérer, pose la question suivante : « Est-il impossible qu'il existe des polyèdres réguliers dont le nombre de faces ne serait pas un de ceux-ci, 4, 6, 8, 12, 20? Voilà, ajoute-t-il, une question qui mériterait d'être approfondie, et qu'il ne paraît pas facile de résoudre en toute rigueur. »

(1) Lu à la première Classe de l'Institut, en février 1811, par A.-L. Cauchy, Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Il est vrai que la diversité des méthodes dont M. Poinsot s'est servi pour faire dériver les trois nouveaux dodécaèdres, et le nouvel icosaèdre du dodécaèdre et de l'icosaèdre ordinaire, laisse en doute la possibilité de résoudre la question précédente; mais, en généralisant quelques principes renfermés dans le Mémoire même de M. Poinsot, on parvient à faire dériver les polyèdres réguliers d'espèces supérieures de ceux de première espèce, par une méthode simple et analytique qui conduit immédiatement à la solution de la question proposée.

Il est facile de voir, et M. Poinsot en a fait l'observation, n° 15 de son Mémoire, qu'on peut former tous les polygones réguliers d'espèces supérieures, en prolongeant les côtés des polygones réguliers de première espèce.

Les polyèdres réguliers d'espèces supérieures dérivent d'une manière analogue des polyèdres réguliers de première espèce, et l'on peut former tous les nouveaux polyèdres réguliers en prolongeant les arêtes ou les faces des polyèdres réguliers déjà connus.

Ainsi, par exemple, en prolongeant dans le dodécaèdre ordinaire les arêtes qui forment les côtés des douze pentagones, on obtient le dodécaèdre étoilé de seconde espèce.

Si, dans le dodécaèdre ordinaire, on prolonge le plan qui contient chaque face jusqu'à la simple rencontre des plans des cinq faces qui entourent la face opposée, on obtiendra le dodécaèdre de troisième espèce, compris comme le dodécaèdre ordinaire sous des pentagones de première espèce.

Enfin, si l'on prolonge les arêtes qui, dans le dodécaèdre de la troisième espèce, forment les côtés des douze pentagones, on obtiendra le dodécaèdre de quatrième espèce.

On obtiendra l'icosaèdre de septième espèce en prolongeant chaque face de l'icosaèdre ordinaire jusqu'à la rencontre des plans des trois triangles qui entourent la face opposée à celle que l'on considère.

Ce que nous venons d'observer relativement aux quatre polyèdres d'espèces supérieures a lieu en général, c'est-à-dire qu'on ne pourra construire des polyèdres réguliers d'espèces supérieures qu'autant qu'ils résulteront du prolongement des faces ou des arêtes de polyèdres réguliers de même ordre et de première espèce.

En effet, supposons que l'on soit parvenu d'une manière quelconque à construire un polyèdre régulier d'espèce supérieure. Transportons-nous par la pensée au centre de la sphère inscrite. Les plans qui comprennent les différentes faces du polyèdre présenteront à l'œil de l'observateur placé à ce centre la forme d'un polyèdre convexe de première espèce, qui servira comme de noyau au polyèdre donné d'espèce supérieure. Je dis, de plus, que la régularité du polyèdre d'espèce supérieure entraîne nécessairement la régularité du polyèdre de première espèce qui lui sert de noyau.

Pour le prouver, revenons à la définition des polyèdres réguliers. Un polyèdre régulier d'une espèce quelconque est celui qui est formé par des polygones égaux et réguliers, également inclinés l'un sur l'autre, et assemblés en même nombre autour de chaque sommet. Il suit de cette définition que, si l'on construit un second polyèdre régulier égal au premier, et que l'on désigne par des numéros 1, 2, 3, 4, ... les faces correspondantes des deux polyèdres, on pourra faire coïncider le second polyèdre avec le premier, en plaçant l'une quelconque des faces du second sur une face déterminée, par exemple sur la face n° 1 du premier, et en commençant par faire coïncider dans ces deux faces deux quelconques de leurs arêtes. Réciproquement, si deux polyèdres égaux satisfont à la condition précédente, on pourra en conclure avec sûreté qu'ils sont réguliers : car, puisqu'on pourra faire alors coïncider chacune des faces du second avec une face déterminée du premier, en commençant par faire coïncider deux arêtes quelconques de ces deux faces, il s'ensuivra que les différentes faces sont des polygones égaux et réguliers; et puisque, en faisant coïncider deux faces quelconques prises à volonté, on fait coïncider toutes les autres, on en conclura que les différents angles dièdres sont égaux, ou, ce qui revient au même, que les faces sont également inclinées l'une sur l'autre, et assemblées en même nombre autour de chaque sommet.

Cela posé, considérons un polyèdre régulier d'espèce supérieure, ayant pour noyau un polyèdre de première espèce et de même ordre, dont la régularité n'est pas encore démontrée. Construisez un second polyèdre d'espèce supérieure égal au premier; vous construirez en même temps un second polyèdre de première espèce égal à celui qui formait le noyau du polyèdre régulier donné; désignez maintenant par des numéros 1, 2, 3, ... les différentes faces correspondantes des deux polyèdres d'espèce supérieure, et par les mêmes numéros 1, 2, 3, ... les faces des polyèdres de première espèce qui sont renfermées dans les mêmes plans que les faces affectées de ces numéros dans les polyèdres d'espèce supérieure. De quelque manière que vous fassiez coïncider les deux polyèdres d'espèce supérieure, les deux polyèdres de première espèce, compris sous les mêmes faces, coïncideront aussi; et comme l'on peut faire coïncider les deux polyèdres réguliers d'espèce supérieure, en plaçant une face quelconque du second sur une face déterminée du premier, il s'ensuit qu'on peut faire coïncider de la même manière les deux polyèdres de première espèce. Par suite, les différentes faces des deux polyèdres de première espèce sont toutes égales entre elles, également inclinées l'une sur l'autre, et assemblées en même nombre autour de chaque sommet.

Il nous reste à prouver que les différentes faces de chaque polyèdre de première espèce sont des polygones réguliers. Pour y parvenir il suffit d'observer que, si l'on fait coïncider d'une manière quelconque une des faces du second polyèdre d'espèce supérieure avec une face déterminée du premier polyèdre de même espèce, les deux faces qui portent les mêmes numéros dans les polyèdres de première espèce coïncideront aussi : or, supposons que le nombre des côtés de chaque face soit égal à n dans les deux polyèdres d'espèce supérieure. Il y aura n manières différentes d'opérer la coïncidence de deux faces de ces polyèdres; et par suite, il y aura aussi n manières d'opérer la coïncidence des faces correspondantes des deux polyèdres de première espèce. Or, on ne peut satisfaire à cette condition qu'en supposant les faces des polyèdres de première espèce égales ou à des polygones réguliers de l'ordre n, ou à des polygones semi-réguliers d'un ordre au moins égal à $2n$; d'ailleurs, il est facile de voir que ce dernier cas ne peut exister : car, comme on ne peut supposer $n=2$, il faudrait que l'on eût au moins $2n=6$; et, dans ce cas, on aurait des polyèdres de première espèce, dont toutes les faces auraient au moins six côtés, ce qui est impossible.

Il est donc prouvé maintenant que dans un ordre quelconque on ne peut construire de polyèdres réguliers d'une espèce supérieure, qu'autant qu'ils résultent du prolongement des arêtes ou des faces des polyèdres réguliers de même ordre et de première espèce qui leur servent de noyau; et que, dans chaque ordre, les faces des polyèdres d'espèces supérieures doivent avoir le même nombre de côtés que celles des polyèdres de première espèce.

Il suit d'abord, de ce qui précède, que, comme il n'y a que cinq ordres de polyèdres qui fournissent des polyèdres réguliers de première espèce, on ne peut chercher que dans ces cinq ordres des polyèdres réguliers d'espèce supérieure. Ainsi tous les polyèdres réguliers, de quelque espèce qu'ils soient, doivent être des tétraèdres, des hexaèdres, des octaèdres, des dodécaèdres, ou des icosaèdres. De plus, tous les tétraèdres, octaèdres et icosaèdres, de quelque espèce qu'ils soient, doivent avoir pour faces des triangles équilatéraux, les hexaèdres des carrés, les dodécaèdres des pentagones réguliers de première ou de seconde espèce. Voyons maintenant combien chaque ordre renferme d'espèces différentes.

Afin de répandre plus de jour sur cette discussion, j'observerai :

1° Qu'on ne peut, des polyèdres réguliers de première espèce, déduire des polyèdres réguliers d'espèces supérieures qu'en prolongeant les arêtes des faces déjà existantes, ou en formant de nouvelles faces;

2° Que le dodécaèdre est le seul polyèdre régulier duquel on puisse obtenir des espèces différentes, en prolongeant les arêtes des faces, parce qu'il existe deux espèces de pentagones, tandis qu'il n'existe qu'une espèce de triangle et une espèce de carré;

3° Que, dans le cas où l'on forme de nouvelles faces, on ne peut les obtenir qu'en prolongeant chacune des faces du polyèdre de première espèce jusqu'à la rencontre de plans qui comprennent des faces non voisines de celle que l'on considère;

4° Que ces dernières doivent être en nombre égal à celui des faces voisines de celle que l'on considère, et avoir toutes sur celle-ci et entre elles une égale inclinaison.

Dans le tétraèdre, chacune des quatre faces est voisine des trois autres, d'où il suit qu'on ne peut obtenir de nouvelles faces en prolongeant celles qui existent; il n'y a donc qu'un seul tétraèdre, celui de première espèce.

Dans l'hexaèdre, les faces qui ne sont pas voisines sont parallèles et, par conséquent, ne peuvent se rencontrer : il n'y a donc aussi qu'un hexaèdre, celui de première espèce.

L'octaèdre ordinaire peut être considéré comme formé par deux faces opposées et comprises dans des plans parallèles, dont chacune est avoisinée par trois autres faces également inclinées sur elle et sur son opposée. Si donc on peut espérer de former un nouvel octaèdre régulier, ce ne peut être qu'en prolongeant jusqu'à la rencontre de chacune des faces les plans qui contiennent les trois faces voisines de celle qui lui est opposée : or cette construction, au lieu de donner un octaèdre régulier d'espèce supérieure, donne un solide double formé par deux tétraèdres qui se traversent mutuellement. C'est ainsi qu'en prolongeant les côtés de l'hexagone ordinaire on obtient deux triangles équilatéraux en croix l'un sur l'autre, au lieu d'un hexagone de seconde espèce.

Si, dans le dodécaèdre ordinaire, on prolonge les côtés des douze pentagones, on aura, ainsi que M. Poinsot l'a observé, un dodécaèdre régulier de deuxième espèce.

Pour obtenir d'autres dodécaèdres, il faut trouver le moyen de prolonger, jusqu'à la rencontre de chaque face du dodécaèdre ordinaire, cinq faces non voisines et également inclinées sur elle. Or, le dodécaèdre ordinaire peut être considéré comme formé de deux faces opposées situées dans des plans parallèles, et dont chacune est avoisinée par cinq autres faces également inclinées sur elle et sur son opposée. Si donc on peut construire d'autres dodécaèdres que ceux décrits ci-dessus, ce ne peut être qu'en prolongeant chaque face du dodécaèdre ordinaire jusqu'à la rencontre des plans qui contiennent les cinq voisines de la face opposée. Les intersections de ces cinq plans avec la face que l'on considère forment deux pentagones réguliers, l'un de première et l'autre de seconde espèce. Ces deux pentagones représentent les faces des dodécaèdres réguliers de troisième et de quatrième espèce.

Dans l'icosaèdre ordinaire, en choisissant pour base une des faces prise à volonté, on trouve, comme dans les trois ordres précédents, une autre face opposée et située dans un plan parallèle. Si l'on classe les triangles compris entre ces deux faces par séries, en renfermant dans une même série ceux qui sont également inclinés sur la base, ou, ce qui revient au même, sur la face opposée, on trouvera que les dix-huit triangles restant forment quatre séries, savoir :

1° Une série de trois triangles voisins de la base;

2° Une série de trois triangles voisins de la face opposée;

3° Une série de six triangles, dont chacun n'a qu'un sommet de commun avec la base;

4° Une série de six triangles, dont chacun n'a qu'un sommet de commun avec la face opposée.

Désignons les triangles de la troisième et de la quatrième série par des numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6; en sorte que deux numéros consécutifs indiquent deux triangles qui se touchent par une arête ou par un sommet. La base d'un nouvel icosaèdre régulier ne pourra être formée que par l'intersection de la base de l'icosaèdre donné avec trois triangles de la même série, également inclinés l'un sur l'autre. Cela posé, il est facile de voir qu'on ne peut espérer d'obtenir la base d'un nouvel icosaèdre que de cinq manières, savoir, en prolongeant, jusqu'à la rencontre du plan de la base donnée :

1° Les plans qui contiennent les trois triangles de la deuxième série;

2° Les plans qui contiennent les triangles 1, 3, 5 de la troisième série;