PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

III.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

(SUITE.)

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

515.

MÉCANIQUE. — *Sur la théorie des moments linéaires et sur les moments linéaires des divers ordres.*

C. R., T. XXXVI, p. 75 (10 janvier 1853).

J'ai développé, depuis plus d'un quart de siècle, non seulement dans mes *Exercices de Mathématiques,* mais aussi dans mes Leçons données à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences, la théorie des *moments linéaires.* Comme j'en ai fait la remarque, cette théorie se lie intimement, d'un côté, à la théorie des *moments* des forces, pris par rapport à un point fixe, et représentés par des surfaces planes, de l'autre, à la théorie des *couples* établie par M. Poinsot. Elle a d'ailleurs, l'avantage de s'appliquer non seulement aux forces, mais encore à toutes les quantités qui ont pour mesure des longueurs portées sur des droites dans des directions déterminées, par exemple aux vitesses et aux quantités de mouvement. Il en résulte qu'elle peut être très utilement employée dans la détermination du mouvement d'un système de points matériels, et en particulier dans la détermination des deux mouvements de translation et de rotation d'un corps solide. D'ailleurs, les théorèmes auxquels on est alors conduit s'énoncent plus facilement, lorsqu'avec MM. Mœbius et Saint-Venant on appelle *somme géométrique* de deux longueurs données une troisième longueur représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux premières. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Considérons d'abord un point mobile rapporté à trois axes fixes qui partent d'une même origine O, et soit P la position de ce point au bout du temps t. Si l'on attribue à t un accroissement infiniment petit Δt, le rayon vecteur OP, considéré comme une quantité géométrique, recevra un accroissement correspondant, et le coefficient de Δt sera, dans l'accroissement du rayon vecteur, ce qu'on nomme la *vitesse*, dans l'accroissement de la vitesse ce qu'on nomme l'*accélération*. Dans la Mécanique, on est généralement convenu d'attribuer cette accélération à une cause du mouvement appelée *force accélératrice*, et l'on prend, pour mesure de cette force, l'accélération même. Cette substitution de la force à l'accélération est d'ailleurs sans inconvénient, et ne saurait être objectée aux géomètres par ceux qui seraient tentés d'élever des doutes sur les résultats du calcul; car on démontre que le système de deux forces appliquées à un point mobile peut être remplacé par leur somme géométrique, et l'expérience prouve que les accélérations, attribuées à des forces diverses, s'ajoutent géométriquement. Ainsi, par exemple, l'accélération d'un astre placé en présence de deux autres est la somme géométrique des accélérations attribuées à des forces attractives émanant de ces derniers.

D'après ce qu'on vient de dire, la force ou l'accélération est, par sa nature, aussi distincte de la vitesse que celle-ci du rayon vecteur mené de l'origine au point mobile. Si quelquefois on a désigné la vitesse sous le nom de *force d'impulsion*, cela tient à ce qu'en Analyse il peut être commode de représenter une grandeur par une autre d'une nature toute différente, par exemple une force par une longueur, ou réciproquement une longueur par une force. Mais il vaut mieux, ce semble, afin de prévenir toute espèce d'équivoque, éviter de substituer les prétendues forces d'impulsion ou les couples d'impulsion aux vitesses elles-mêmes ou aux moments linéaires de ces vitesses.

Revenons au point mobile P. Pendant qu'il se meut dans l'espace, le rayon vecteur OP décrit une surface conique. Construisons une courbe dont l'arc soit proportionnel à l'aire décrite par le rayon vecteur, la tangente menée par l'extrémité S de cet arc étant perpendiculaire au plan qui touche le cône suivant le rayon vecteur. Le point mobile S sera celui qu'on peut nommer, en se servant d'une épithète introduite dans la science par M. Binet, le *curseur aréolaire*. D'ailleurs la vitesse de ce curseur ou la *vitesse aréolaire* sera proportionnelle au moment linéaire de la vitesse du point P, et l'accélération du point S ou l'*accélération aréolaire* sera proportionnelle au moment linéaire de l'accélération du point P. Dans mes Leçons de 1849, à la Faculté des Sciences, j'ai supposé que le rapport entre l'arc aréolaire et l'aire décrite par le rayon vecteur se réduisait à l'unité. Alors la vitesse aréolaire ne diffère pas en intensité de celle que M. Binet a désignée sous ce nom, c'est-à-dire de la vitesse avec laquelle croît l'aire décrite par le rayon vecteur. Si le rapport de l'arc à cette aire devient égal à 2, la vitesse et l'accélération aréolaires seront précisément les moments linéaires de la vitesse et de l'accélération du point mobile P.

Tandis que le point mobile P se déplace dans l'espace, la projection orthogonale ou même oblique de ce point sur un plan ou sur un axe se déplace pareillement, et le déplacement de cette projection n'est autre chose que la projection du déplacement du point P. De cette seule remarque il suit immédiatement que *la vitesse et l'accélération du point projeté sont les projections de la vitesse et de l'accélération du point donné*.

Plus généralement, si deux points se meuvent simultanément dans l'espace, le déplacement absolu du second sera la somme géométrique qu'on obtient en ajoutant au déplacement absolu du premier le déplacement apparent du second vu du premier. Donc aussi *la vitesse absolue et l'accélération absolue du second point seront les sommes géométriques qu'on obtient quand, à la vitesse ou à l'accélération absolue du premier point, on ajoute la vitesse ou l'accélération apparente du second point vu du premier.*

Enfin, lorsqu'un point mobile P se déplace dans l'espace, si l'on mène par ce point et par un certain axe RS un plan PRS, ce plan se déplacera lui-même avec le temps, et, pendant un instant infiniment petit Δt, il décrira autour de l'axe RS un certain angle. Le coefficient de Δt, dans la valeur de cet angle, sera ce qu'on peut appeler la *vitesse angulaire* du plan mobile autour de l'axe RS. On obtiendra cette vitesse angulaire en divisant la projection de la vitesse du point P sur une perpendiculaire au plan PRS par la distance du point P à l'axe RS.

Jusqu'ici, nous avons fait abstraction de la nature des corps et des points matériels. Alors, comme on l'a dit, l'accélération que produit une force appliquée à un point matériel peut servir de mesure à cette force, nommée, pour cette raison, *accélératrice*. Mais l'expérience démontre que l'effet produit, dans le cas d'équilibre ou de mouvement, par une force appliquée à un point matériel, est tout à la fois proportionnel à l'accélération et à un certain coefficient appelé *masse*, qui dépend de la nature du point mobile. Donc, lorsqu'on veut avoir égard à la masse, on doit prendre pour mesure de la force le produit de la masse par l'accélération. On obtient de cette manière ce qu'on nomme la *force motrice*.

Considérons maintenant un système de points mobiles libres ou assujettis à des liaisons quelconques. En vertu du principe de d'Alembert, le système des forces appliquées à ces points devra être équivalent au système des forces motrices qui ont pour mesure les produits de leurs masses par leurs accélérations; et, pour obtenir les diverses équations du mouvement, il suffira de joindre à cette proposition le principe des vitesses virtuelles. Si les liaisons données permettent de prendre successivement pour mouvements virtuels des mouvements quelconques de translation ou de rotation communs aux divers points, par exemple des mouvements effectués parallèlement aux axes coordonnés ou autour de ces mêmes axes, la considération de ces mouvements fournira *six équations* entre les deux systèmes de forces ci-dessus mentionnés. D'ailleurs, ces six équations pourront être remplacées par deux *équations géométriques,* exprimant que *la somme géométrique des forces et la somme géométrique de leurs moments linéaires, en d'autres termes,* LA FORCE PRINCIPALE *et le* MOMENT PRINCIPAL *restent les mêmes dans les deux systèmes.* Ajoutons qu'il faut bien se garder de confondre le moment principal qui se rapporte aux forces, et qu'on pourrait appeler le *moment dynamique,* avec le moment principal qui se rapporte aux quantités de mouvement, c'est-à-dire aux vitesses multipliées par les masses, et qu'on pourrait appeler le *moment cinématique.* De ces deux moments, le premier est la dérivée du second, prise par rapport au temps, tout comme la somme géométrique des forces motrices est la dérivée de la somme géométrique des quantités de mouvement.

Les deux équations géométriques ici indiquées continuent de subsister, lorsque, dans chacune d'elles, on remplace les diverses quantités géométriques par leurs projections algébriques sur un même axe; et, en prenant successivement pour cet axe chacun des axes coordonnés, on est immédiatement ramené aux six équations connues, qui se trouvent ainsi établies dans le cas même où les axes cessent d'être rectangulaires.

Concevons à présent qu'après avoir multiplié la masse de chacun des points matériels donnés par la quantité géométrique qui représente le rayon vecteur mené de l'origine à ce point, ou par sa dérivée du premier ou du second ordre, c'est-à-dire, en d'autres termes, par la vitesse du point ou par son accélération, on ajoute entre eux les produits ainsi formés; on obtiendra un *rayon vecteur moyen,* ou une *vitesse moyenne,* ou une *accélération moyenne.* Or l'extrémité du rayon vecteur moyen sera précisément ce qu'on appelle le *centre des moyennes distances,* ou *centre d'inertie,* et la vitesse moyenne, ainsi que l'accélération moyenne, ne seront autre chose que la vitesse et l'accélération de ce même centre. Il y a plus : si, dans les produits dont il s'agit, on substitue aux rayons vecteurs, aux vitesses et aux accélérations leurs moments linéaires, ou, en d'autres termes, si l'on substitue à chacun des points donnés le curseur aréolaire qui lui correspond, alors, à la place du centre d'inertie, on obtiendra ce qu'on peut appeler le *centre aréolaire*. Cela posé, les deux équations géométriques ci-dessus indiquées montrent que le centre d'inertie se meut comme si toutes les forces motrices lui étaient appliquées, et le centre aréolaire comme un point auquel on appliquerait à chaque instant, non plus les forces motrices données, mais d'autres forces représentées par les moments linéaires des premières.

Dans le cas particulier où la somme géométrique des forces appliquées s'évanouit, ainsi que la somme géométrique de leurs moments linéaires, le centre d'inertie du système des points donnés est animé d'une vitesse constante et constamment dirigée suivant la même droite; en d'autres termes, *le centre d'inertie a un mouvement uniforme*, et l'on peut en dire autant du *centre aréolaire*.

Je viens de rappeler les principes généraux sur lesquels il paraît convenable de s'appuyer pour résoudre les problèmes de la Mécanique. Ces principes, que j'ai développés en 1849, dans mes Leçons à la Faculté des Sciences, et qui sont même en grande partie ceux qu'à l'École Polytechnique je présentais, il y a plus d'un quart de siècle, comme devant servir de base à la Mécanique, résument en quelque sorte, sous une forme simple et lumineuse, non seulement les théories exposées dans les Mémoires ou les Ouvrages d'Euler, de Lagrange, de d'Alembert, etc., mais encore les recherches plus récemment publiées sur ce sujet, soit dans la *Mécanique* de Poisson, soit dans les Ouvrages de divers auteurs, particulièrement de MM. Poinsot, Binet, Coriolis, Mœbius, Saint-Venant, etc. On peut d'ailleurs, dans l'application de ces principes à la solution définitive des problèmes, recourir utilement à la considération des moments linéaires des divers ordres dont je vais donner une idée en peu de mots.

Un point fixe O étant pris pour centre des moments, considérons une longueur AB qui, partant d'un autre point A, aboutisse au point B; et, après avoir construit le moment linéaire OK de la longueur AB, menons par le point A une droite AC égale et parallèle à OK, puis une droite AD égale et parallèle au moment linéaire de AC; etc. Les moments linéaires successifs des longueurs AB, AC, AD, ... seront, à l'égard de la longueur AB, ce que nous nommerons *les moments linéaires du premier, du second, du troisième, ... ordre.* Comme je l'expliquerai dans un autre article, l'usage de ces moments linéaires conduit très promptement aux formules qui déterminent le double mouvement de translation et de rotation d'un corps. Dans le cas où le corps est retenu par un point fixe, on arrive, presque sans calcul, à une équation géométrique qui comprend les trois formules données par Euler pour la détermination du mouvement de rotation du corps autour de ce point. Il y a plus : on peut souvent déduire avec facilité de cette équation géométrique les lois du mouvement. On en conclut, par exemple, qu'un solide de révolution, soumis à la seule action de la pesanteur et traversé par un axe dont l'extrémité inférieure s'appuie sur un plan horizontal, peut, en tournant sur lui-même avec une vitesse suffisamment grande, tourner en même temps autour de la verticale, de manière que l'inclinaison de l'axe par rapport au plan horizontal demeure constante. Je me bornerai, pour le moment, à formuler ici les lois de ce phénomène qu'indiquent les évolutions d'une toupie, et qu'a mis en évidence une belle expérience de M. Foucault.

Soient

P le poids du corps;

X la distance entre le centre de gravité et le point d'appui, situés l'un et l'autre sur l'axe de révolution;

ϖ l'angle formé par cet axe avec la verticale;

A le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de révolution;

B le moment d'inertie relatif à un second axe horizontal, perpendiculaire au premier, et passant par le point d'appui;

8 la vitesse angulaire avec laquelle le corps tourne autour de l'axe instantané de rotation;

u la projection de cette vitesse angulaire sur l'axe de révolution;

Υ la vitesse angulaire d'un point situé sur l'axe de révolution autour de la verticale,

et faisons, pour abréger,

$$\Pi = PX.$$

Les vitesses angulaires $8, \Upsilon$ correspondront à des mouvements de rotation dirigés dans le même sens, et l'on aura

$$Au\Upsilon = \Pi + B\Upsilon^2 \cos\varpi.$$

Si la vitesse 8 est très grande, l'axe instantané de rotation se confondra sensiblement avec l'axe de révolution, et la projection u de la vitesse 8 avec cette vitesse elle-même. Alors l'équation trouvée donnera sensiblement

$$8\Upsilon = \frac{\Pi}{A},$$

quel que soit l'angle ϖ. Donc alors *la vitesse de rotation d'un point de l'axe de révolution autour de la verticale sera sensiblement en raison inverse de la vitesse de rotation du corps autour de son axe.*

La dernière des équations que nous venons de poser s'accorde avec des formules que Poisson a données dans la seconde édition de sa *Mécanique* en les déduisant d'un calcul approximatif.

516.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les clefs algébriques* (suite).

C. R., T. XXXVI, p. 129 (17 janvier 1853).

Les *clefs algébriques*, telles que je les ai définies, peuvent être considérées comme des quantités véritables. Mais ce sont des quantités dont le rôle est spécial et transitoire, des quantités qui n'apparaissent