PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

III.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

(SUITE.)

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

399.

GÉOMÉTRIE. — *Sur quelques théorèmes de Géométrie analytique relatifs aux polynômes et aux polyèdres réguliers.*

C. R., T. XXVI, p. 489 (8 mai 1848).

Considérons, dans un plan ou dans l'espace, divers points situés à la même distance r d'un centre fixe. Si, en prenant ce centre pour origine, on détermine la position de chaque point : 1° à l'aide de coordonnées rectilignes x, y, z ; 2° à l'aide de coordonnées polaires p, q, r, les coordonnées p, q étant les angles formés par le rayon r avec un rayon fixe, nommé *axe polaire*, et par le plan de ces deux rayons avec un plan fixe, ou *plan polaire*, toute fonction entière des coordonnées rectilignes x, y, z sera, en même temps, une fonction entière des sinus et cosinus des angles polaires p, q, par conséquent une fonction entière de chacune des exponentielles trigonométriques qui ont pour arguments les angles $+p$, $-p$, $+q$, $-q$. D'autre part, on sait que les puissances entières et semblables des diverses racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité donnent pour somme n ou zéro, suivant que le degré commun de ces puissances est ou n'est pas un multiple de n. Par suite, si à une puissance entière de l'exponentielle trigonométrique, dont l'argument est l'angle polaire p ou q, on ajoute les puissances semblables des exponentielles trigonométriques diverses, dont les arguments surpassent l'angle p ou q de quantités égales à des multiples de la $n^{\text{ième}}$ partie de la circonférence, la somme obtenue sera précisément le produit de la puissance donnée par le nombre n, quand cette puissance sera du $n^{\text{ième}}$ degré, ou d'un degré égal à un multiple de n; la même somme sera nulle dans le cas contraire. Par suite aussi, la moyenne arithmétique entre les diverses puissances dont il s'agit se réduira, dans le premier cas, à la puissance donnée; dans le second cas, à zéro. En partant de ces principes, on établira sans peine les théorèmes que nous allons énoncer.

Théorème I. — *Si, dans un plan, on prend pour origine des coordonnées le centre d'un polygone régulier de n côtés, et si l'on substitue les coordonnées rectilignes d'un sommet de ce polygone dans une fonction entière de ces coordonnées, d'un degré inférieur à n, la moyenne arithmétique entre les valeurs de cette fonction correspondantes aux divers sommets restera invariable, tandis qu'on fera tourner le polygone autour de son centre, en laissant immobiles les axes coordonnés.*

Théorème II. — *Si, dans l'espace, on prend pour origine des coordonnées le centre d'un polyèdre régulier, dans lequel n arêtes aboutissent à chaque sommet, et si l'on substitue les coordonnées rectilignes d'un sommet de ce polyèdre dans une fonction entière de ces coordonnées, d'un degré inférieur à n, la moyenne arithmetique entre les valeurs de cette fonction correspondantes aux divers sommets restera invariable, tandis que l'on fera tourner d'une manière quelconque le polyèdre autour de son centre, en laissant immobiles les axes coordonnés.*

De ces deux théorèmes, le premier se déduit très aisément des principes ci-dessus rappelés. Pour démontrer de la même manière le second théorème, dans le cas particulier où le polyèdre donné tourne autour du rayon vecteur mené du centre à l'un des sommets, il suffit de faire coïncider avec ce rayon vecteur l'axe polaire, c'est-à-dire le rayon fixe à partir duquel se compte l'angle polaire p. Ajoutons que l'on peut aisément passer de ce cas particulier au cas général. En effet, un déplacement déterminé du polyèdre tournant d'une manière quelconque autour de son centre peut toujours être considéré comme le résultat de trois déplacements successifs, dont chacun serait produit par un mouvement de rotation du polyèdre autour de l'un des rayons vecteurs menés du centre aux divers sommets. Ajoutons que, pour obtenir un déplacement déterminé d'un seul de ces rayons vecteurs, il suffirait, en général, d'imprimer successivement, autour de deux autres rayons vecteurs, des mouvements de rotation convenables au polyèdre dont il s'agit.

Certaines grandeurs ou quantités qui dépendent de la direction d'une droite émanant d'un centre fixe se réduisent à des fonctions entières des cosinus des angles formés par cette droite avec deux ou trois axes fixes rectangulaires entre eux. D'ailleurs, ces cosinus ne sont autre chose que des coordonnées rectangulaires d'un point situé sur cette droite à l'unité de distance du centre fixe. Cela posé, les théorèmes I et II entraînent évidemment la proposition suivante :

Théorème III. — *Concevons que, dans un plan donné ou dans l'espace, on construise une espèce de rose des vents ou de hérisson, en faisant partir du centre d'un polygone ou d'un polyèdre régulier des rayons vecteurs dirigés vers les sommets de ce polygone ou de ce polyèdre. Considérons d'ailleurs une quantité ou grandeur qui varie avec la direction d'une droite tracée dans le plan donné ou dans l'espace à partir du même centre. Enfin, supposons cette grandeur représentée par une fonction entière des cosinus des angles que la droite forme avec deux ou trois axes fixes rectangulaires entre eux. Si le degré de cette fonction est inférieur au nombre des côtés du polygone ou au nombre des arêtes qui, dans le polyèdre, aboutissent à un même sommet, la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs de la fonction correspondantes aux diverses directions que présente la rose des vents ou le hérisson ne variera pas quand on fera tourner cette rose ou ce hérisson autour de son centre.*

La grandeur que l'on considère pourrait être, par exemple, le rapport de l'unité au carré du rayon vecteur d'une ellipse, ou la courbure d'une section normale faite dans une surface courbe en un point donné, ou bien encore le rapport de l'unité au carré du rayon vecteur qui joint le centre à un point de la surface dans un ellipsoïde ou dans le système de deux hyperboloïdes conjugués. Dans ces diverses hypothèses, le troisième théorème reproduirait des propositions énoncées dans mes applications géométriques du Calcul infinitésimal, avec quelques propositions analogues récemment données par d'autres auteurs.

La grandeur que l'on considère pourrait être aussi une dilatation linéaire infiniment petite, mesurée en un point donné d'un corps, ou le moment d'inertie du corps autour d'un axe passant par ce point, ou le carré de la pression supportée en ce point par un plan perpendiculaire à une droite donnée, ou la composante normale de cette pression, etc. Dans ces dernières hypothèses, le troisième théorème fournirait des propositions nouvelles. Je citerai, comme exemple, la suivante :

Théorème IV. — *Si, d'un point donné d'un corps solide, on mène des droites aux divers sommets d'un polyèdre régulier qui ait pour centre ce même point, et si l'on détermine successivement les divers moments d'inertie du corps autour de ces droites, la moyenne arithmétique entre ces divers moments d'inertie restera invariable, tandis que l'on fera tourner le polyèdre autour du point donné.*

Supposons, maintenant, que la fonction entière mentionnée dans le premier théorème soit développée suivant les puissances entières positives et négatives de l'exponentielle trigonométrique qui a pour argument l'angle polaire p. Le degré de cette fonction entière étant inférieur au nombre n des côtés du polygone régulier donné, la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs de la fonction se réduira au terme constant du développement obtenu. Donc cette moyenne arithmétique offrira la même valeur, quel que soit n, et même pour $n = 3$, c'est-à-dire quand le polygone régulier deviendra un triangle équilatéral, si la fonction entière donnée est simplement du second degré.

Considérons encore la fonction entière mentionnée dans le second théorème, et, en prenant pour axe polaire l'un des rayons vecteurs qui joignent le centre du polyèdre donné à l'un des sommets, développons la fonction dont il s'agit suivant les puissances entières positives ou négatives de l'exponentielle trigonométrique qui a pour argument l'angle polaire q. Le degré de la fonction étant inférieur au nombre des côtés de tout polygone régulier construit avec des sommets du polyèdre renfermés dans un plan perpendiculaire à l'axe polaire, le développement obtenu pourra être réduit à la partie de ce développement indépendante de l'angle q. D'ailleurs, si le polyèdre donné est un tétraèdre, le rayon vecteur mené du centre à l'un des quatre sommets sera perpendiculaire au plan qui renfermera les trois autres, et le polygone construit avec ces derniers sera un triangle équilatéral. Donc les moyennes arithmétiques auxquelles se rapportent les théorèmes II et III ne pourront généralement devenir indépendantes du nombre des faces attribuées au polyèdre régulier, que dans le cas où la fonction entière donnée sera du second degré.

Au reste, il est aisé de s'assurer que, *si la fonction entière à laquelle se rapporte le théorème III est du second degré par rapport aux cosinus des angles que forme une droite avec trois axes fixes rectangulaires, la moyenne entre les diverses valeurs de cette fonction deviendra effectivement indépendante du nombre des faces du polyèdre régulier donné*. Il y a plus : pour établir cette dernière proposition dans le cas général, il suffira, d'après ce qui vient d'être dit, de la démontrer dans le cas spécial où la fonction donnée se réduit à une fonction de $\cos p$, entière et du second degré, p étant l'angle que forme une droite mobile avec l'axe polaire mené du centre du polyèdre régulier à l'un des sommets; par conséquent, il suffira d'établir la proposition dont il s'agit dans le cas particulier où la fonction donnée se réduit soit à $\cos p$, soit à $\cos^2 p$. Or, si l'on fait coïncider successivement la droite mobile avec les divers rayons vecteurs menés du centre du polyèdre réguliers aux divers sommets, l'axe polaire étant un de ces rayons vecteurs, la moyenne entre les diverses valeurs de $\cos p$ sera nulle, même pour le tétraèdre, pour lequel la somme des valeurs de $\cos p$ sera

$$1 + 3\left(-\frac{1}{3}\right) = 0;$$

et la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs de $\cos^2 p$ se réduira toujours à la fraction $\frac{1}{3}$; car la somme des valeurs de $\cos^2 p$ sera

Pour le tétraèdre. ...... $1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$,

Pour l'hexaèdre .... $2 + 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$,

Pour l'octaèdre.......... $2 + 4(0) = 2$,

Pour le dodécaèdre...... $2 + 6\left(\frac{5}{9}\right) + 12\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{20}{3}$,

Pour l'icosaèdre......... $2 + 10\left(\frac{1}{5}\right) = 4$;

tandis que le nombre des sommets, dans les mêmes polyèdres, coïncidera successivement avec chacun des termes de la suite

$$4,\quad 8,\quad 6,\quad 20,\quad 12.$$

Donc, en définitive, la proposition énoncée subsiste; et par suite la moyenne mentionnée dans le théorème IV sera indépendante du nombre des faces du polyèdre régulier donné.

400.

Géométrie analytique. — *Rapport sur une Note de* M. Breton, de Champ, *relatif à quelques propriétés des rayons de courbure des surfaces.*

C. R., T. XXVI, p. 494 (8 mai 1848).

On sait depuis longtemps que, si, après avoir mené par un point d'une surface courbe deux plans rectangulaires entre eux et normaux à cette surface, on détermine la courbure de chaque ligne d'intersection, c'est-à-dire le rapport de l'unité au rayon de courbure de cette ligne, la somme des deux courbures obtenues sera une quantité constante, pourvu que l'on affecte de signes différents les courbures dirigées en sens contraire. Ce théorème, énoncé par l'un de nous, dans ses applications géométriques du Calcul infinitésimal, a été généralisé par l'un de nos confrères. M. Babinet a remarqué, en effet, que, si par la normale à une surface courbe on conduit des plans qui comprennent tous entre eux des angles égaux, les courbures des sections contenues dans ces plans fourniront une somme constante, et qu'en outre la courbure moyenne sera indépendante du nombre des plans dont il s'agit. Dans la Note soumise à notre examen, M. Breton, de Champ, prouve que le théorème de M. Babinet continuera de subsister si l'on y remplace la courbure de chaque section par une puissance entière de cette courbure, d'un degré inférieur au nombre des sections données. Il établit aussi quelques autres théorèmes analogues.

Les Commissaires pensent que les théorèmes énoncés par M. Breton, de Champ, peuvent intéresser les personnes qui s'appliquent à l'étude de la Géométrie analytique, et ils proposent à l'Académie de lui voter des encouragements.

401.

Géométrie. — *Note sur quelques propriétes remarquables des polyèdres réguliers.*

C. R., T. XXVI, p. 517 (15 mai 1848).

J'ai montré, dans la dernière séance, la liaison qui existe entre certaines propositions de Géométrie analytique et quelques propriétés des polyèdres réguliers. Je vais indiquer aujourd'hui des moyens faciles d'établir ces mêmes propriétés, et plusieurs autres qui paraissent assez remarquables pour mériter de fixer un instant l'attention des géomètres.

On sait, depuis longtemps, que l'on peut construire cinq polyèdres réguliers convexes, savoir, le tétraèdre, l'hexaèdre, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. On sait que, dans ces divers polyèdres, où le nombre des faces est successivement représenté par chacun des termes de la suite

$$4, \quad 6, \quad 8, \quad 12, \quad 20,$$

le nombre des sommets se trouve successivement représenté par chacun des termes de la suite

$$4, \quad 8, \quad 6, \quad 20, \quad 12.$$

On sait aussi que le nombre des arêtes est six dans le tétraèdre, douze dans l'hexaèdre et l'octaèdre, trente dans le dodécaèdre et l'icosaèdre.

On sait enfin qu'à chaque angle solide aboutissent trois arêtes dans le tétraèdre, l'hexaèdre et le dodécaèdre réguliers, quatre arêtes dans l'octaèdre et cinq arêtes dans l'icosaèdre.

On peut encore établir facilement la proposition suivante :

Théorème I. — *Les centres des diverses faces d'un polyèdre régulier quelconque sont les sommets d'un autre polyèdre régulier. D'ailleurs deux polyèdres réguliers, dont l'un a pour sommets les centres des faces de l'autre, sont nécessairement ou deux tétraèdres, ou un hexaèdre et un octaèdre, ou un dodécaèdre et un icosaèdre.*

Théorème II. — *Dans tout polyèdre régulier, la droite menée du centre à un sommet est perpendiculaire aux plans de divers polygones réguliers auxquels appartiennent tous les sommets situés hors de cette droite.*

Si le polyèdre donné est un tétraèdre, un seul sommet sera situé sur la droite dont il s'agit, les trois autres appartiendront à un triangle équilatéral dont le plan sera perpendiculaire à la droite.

Si le polyèdre donné est un hexaèdre, ou un octaèdre, ou un dodécaèdre, ou un icosaèdre, deux sommets seront les extrémités d'un