PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

III.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

(SUITE.)

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

320.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les fonctions de cinq ou six variables et spécialement sur celles qui sont doublement transitives.*

C. R., T. XXII, p. 2 (5 janvier 1846).

§ III. — *Sur la fonction de six variables, qui est tout à la fois transitive par rapport à trois et à cinq variables, et intransitive par rapport à quatre.*

Soient

Ω une fonction de six variables x, y, z, u, v, w;
M le nombre de ses valeurs égales;
m le nombre de ses valeurs distinctes.

On aura

$$mM = 1.2.3.4.5.6$$

ou, ce qui revient au même,

$$mM = 720. \tag{1}$$

Soit d'ailleurs H_l le nombre des substitutions qui renferment l variables et n'altèrent pas la valeur de la fonction Ω. Si cette fonction, étant transitive par rapport à six et à cinq variables, offre plus de deux valeurs distinctes, alors, d'après ce qu'on a vu dans les paragraphes précédents, elle aura 6, 12 ou 24 valeurs distinctes et sera toujours altérée par toute substitution qui déplacera deux ou trois variables; on aura donc, non seulement

$$H_0 = 1, \qquad H_1 = 0,$$

mais encore

$$H_2 = 0, \qquad H_3 = 0.$$

Cela posé, les formules établies dans la séance du 10 novembre donneront

$$\begin{aligned} M &= H_6 + H_5 + H_4 + 1, \\ M &= H_5 + 2H_4 + 6, \\ M &= 2H_4 + 30, \end{aligned}$$

et l'on en conclura

$$(2) \qquad H_6 = \tfrac{1}{2}M - 10, \qquad H_5 = 24, \qquad H_4 = \tfrac{1}{2}M - 15.$$

Soit maintenant

$$\mathrm{P}_{a,b,c,\ldots}$$

une substitution relative aux six variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad u, \quad v, \quad w,$$

et composée de facteurs circulaires dont le premier soit de l'ordre a, le second de l'ordre b, le troisième de l'ordre c, etc. Soient encore

$\omega_{a,b,c,\ldots}$ le nombre des formes que peut revêtir la substitution $\mathrm{P}_{a,b,c,\ldots}$ exprimée à l'aide de ses facteurs circulaires, lorsqu'on met toutes les variables en évidence, et que l'on s'astreint à faire toujours occuper les mêmes places, dans cette substitution, par des facteurs circulaires de même ordre;

$\varpi_{a,b,c,\ldots}$ le nombre total des substitutions semblables à $\mathrm{P}_{a,b,c,\ldots}$, qui peuvent être formées avec les six variables $x, y, z, u, v, w, \ldots$;

$h_{a,b,c,\ldots}$ le nombre de celles de ces substitutions qui n'altèrent pas la valeur de Ω;

$k_{a,b,c,\dots}$ le nombre des valeurs distinctes de Ω qui ne sont pas altérées par la substitution $P_{a,b,c,\dots}$.

Puisque, dans l'hypothèse admise, les substitutions qui n'altéreront pas Ω déplaceront quatre variables au moins, celles de ces substitutions qui déplaceront quatre ou cinq variables devront être régulières (séance du 8 décembre), et par conséquent circulaires, si elles déplacent cinq variables. On aura donc, non seulement

$$h_2 = 0, \qquad h_3 = 0,$$

mais encore

$$H_5 = h_5.$$

On aura, au contraire,

$$H_4 = h_4 + h_{2,2},$$

$$H_6 = h_6 + h_{3,3} + h_{2,2,2} + h_{4,2}.$$

Donc les formules (2) donneront

$$(3) \qquad h_4 + h_{2,2} = \tfrac{1}{2}M - 15, \qquad h_5 = 24,$$

$$(4) \qquad h_6 + h_{3,3} + h_{2,2,2} + h_{4,2} = \tfrac{1}{2}M - 10.$$

D'autre part, on aura généralement (séance du 15 décembre)

$$(5) \qquad mh_{a,b,c,\dots} = \varpi_{a,b,c,\dots}\, k_{a,b,c,\dots},$$

et les deux nombres

$$h_{a,b,c,\dots}, \quad k_{a,b,c,\dots},$$

dont le premier sera égal ou inférieur à la limite $\varpi_{a,b,c,\dots}$, le second égal ou inférieur à la limite m, ne pourront atteindre simultanément ces deux limites que dans le cas où Ω ne sera jamais altéré par aucune substitution de la forme $P_{a,b,c,\dots}$. Enfin les nombres

$$\varpi_{a,b,c,\dots} \quad \omega_{a,b,c,\dots}$$

seront liés entre eux par la formule

$$(6) \qquad \omega_{a,b,c,\dots}\, \varpi_{a,b,c,\dots} = mM = 720;$$

et, comme on trouvera successivement

$$\omega_4 = (1.2)4 = 8, \qquad \omega_{2,2} = (1.2)^2 2^2 = 16, \qquad \omega_5 = 5,$$
$$\omega_6 = 6, \qquad \omega_{3,3} = (1.2)3^2 = 18, \qquad \omega_{2,2,2} = (1.2.3)2^3 = 48, \qquad \omega_{4,2} = 4.2 = 8,$$

on en conclura

$$\varpi_4 = 90, \qquad \varpi_{2,2} = 45, \qquad \varpi_5 = 144,$$
$$\varpi_6 = 120, \qquad \varpi_{3,3} = 40, \qquad \varpi_{2,2,2} = 15, \qquad \varpi_{4,2} = 90.$$

Donc la formule (5) donnera

$$(7) \qquad mh_4 = 90k_4, \qquad mh_{2,2} = 45k_{2,2}, \qquad mh_5 = 144k_5,$$
$$(8) \qquad mh_6 = 120k_6, \qquad mh_{3,3} = 40k_{3,3}, \qquad mh_{2,2,2} = 15k_{2,2,2}, \qquad mh_{4,2} = 90k_{4,2},$$

et les équations (3), (4), jointes à la formule (1), entraîneront les suivantes :

$$(9) \qquad 2k_4 + k_{2,2} = 8 - \frac{m}{3}, \qquad k_5 = \frac{m}{6},$$

$$(10) \qquad 24k_6 + 8k_{3,3} + 3k_{2,2,2} + 18k_{4,2} = 72 - 2m.$$

Il suit des formules (9) que, dans l'hypothèse admise, c'est-à-dire dans le cas où la fonction Ω, étant transitive par rapport à cinq et à six variables, offre plus de deux valeurs égales, m doit être divisible par 6. Effectivement, d'après ce qu'on a vu dans les paragraphes précédents, m ne peut être alors que l'un des nombres

$$6, \quad 12, \quad 24,$$

auxquels correspondent les valeurs

$$120, \quad 60, \quad 30$$

du nombre M.

D'autre part, puisque chacun des nombres

$$6, \quad 12, \quad 24$$

est divisible par le facteur 3, il résulte d'un théorème précédemment établi (séance du 13 octobre, page 851 [1]), que, dans l'hypothèse

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. IX, p. 359.

admise, quelques-unes des substitutions

$$(11)\qquad 1,\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q},\ \mathrm{R},\ \ldots$$

qui n'altéreront pas la valeur de Ω seront régulières et du troisième ordre. Donc, puisque h_3 est nul, $h_{3,3}$ et par suite $k_{3,3}$ ne pourront s'évanouir. Donc l'une au moins des substitutions 1, P, Q, R, ... sera de la forme $\mathrm{P}_{3,3}$; et, comme la substitution inverse $\mathrm{P}_{3,3}^{-1}$ sera encore de la même forme, nous devons conclure que $h_{3,3}$ sera, dans l'hypothèse admise, un nombre pair différent de zéro. Ce n'est pas tout : comme la seconde des formules (8) donne

$$(12)\qquad k_{3,3} = \frac{m}{40} h_{3,3},$$

le nombre $k_{3,3}$ devra être, ainsi que m, divisible par 3; et même, si l'on supposait $m = 24$, la formule (12), réduite à

$$k_{3,3} = \tfrac{3}{5} h_{3,3},$$

donnerait pour $k_{3,3}$ un nombre divisible par 6. Mais alors, évidemment, la formule (10) ne pourrait plus être vérifiée, puisque le premier membre, égal ou supérieur au nombre

$$8 k_{3,3} = 48,$$

surpasserait la différence

$$72 - 2m = 72 - 48 = 24.$$

Donc il n'est pas possible de supposer $m = 24$.

Concevons maintenant que la fonction Ω doive être tout à la fois transitive par rapport à six et à cinq variables, et intransitive par rapport à quatre. Alors, d'après ce qui a été dit dans le § I, le nombre m des valeurs distinctes de Ω ne pourra être que l'un des nombres

$$12,\quad 24.$$

Donc, puisqu'on devra exclure la supposition $m = 24$, on aura nécessairement

$$m = 12;$$

et par suite (*voir* la séance du 29 décembre, p. 1405 [1]), h_4, k_4 devront s'évanouir. Alors aussi les formules (7), (8), (9), (10) donneront

$$4h_{2,2} = 15k_{2,2}, \qquad h_5 = 12k_5, \tag{13}$$

$$h_6 = 10k_6, \qquad 3h_{3,3} = 10k_{3,3}, \qquad 4h_{2,2,2} = 5k_{2,2,2}, \qquad 2h_{4,2} = 15k_{4,2}, \tag{14}$$

$$k_{2,2} = 4, \qquad k_5 = 2, \tag{15}$$

$$24k_6 + 8k_{3,3} + 3k_{2,2,2} + 18k_{4,2} = 48. \tag{16}$$

Des formules (13) et (15) on déduira les suivantes

$$h_{2,2} = 15, \qquad h_5 = 24, \tag{17}$$

que l'on pourrait tirer encore des équations obtenues dans le § I. Ajoutons que des formules (14) et (16) on pourra aisément déduire les valeurs des quantités

$$h_6, \quad h_{3,3}, \quad h_{2,2,2}, \quad h_{4,2};$$

et d'abord, puisque $k_{3,3}$ devra être un nombre entier distinct de zéro et divisible par 3, le terme $8k_{3,3}$ de la formule (14) sera égal ou supérieur à 24. Donc le terme $18k_{4,2}$ devra être inférieur à la différence $48 - 24 = 24$. Donc le nombre entier $k_{4,2}$ devra être inférieur à $\frac{4}{3}$; et, comme d'ailleurs il doit être divisible par 2, en vertu de la dernière des formules (14), on aura nécessairement

$$k_{4,2} = 0, \qquad h_{4,2} = 0;$$

en sorte que l'équation (14) se trouvera réduite à

$$24k_6 + 8k_{3,3} + 3k_{2,2,2} = 48. \tag{18}$$

D'autre part, si k_6 différait de zéro, on pourrait en dire autant de $k_{3,3}$ et de $k_{2,2}$, attendu qu'une substitution de la forme

$$P_6$$

a pour carré une substitution de la forme $P_{3,3}$, et pour cube une substitution de la forme $P_{2,2,2}$. Cela posé, comme, en vertu des formules (14), $k_{3,3}$ devra être divisible par le facteur 3, et $k_{2,2,2}$, par le

[1] *OEuvres de Cauchy*, S. I, T. IX, p. 500.

facteur 4, il est clair que, en supposant k_6 différent de zéro, on obtiendrait pour premier membre de la formule (18) une somme égale ou supérieure à

$$24 + 8.3 + 3.4 = 60.$$

Donc alors cette formule ne pourrait être vérifiée. On aura donc encore nécessairement

$$k_6 = 0, \qquad h_6 = 0,$$

et par suite l'équation (18) sera réduite à

$$8k_{3,3} + 3k_{2,2,2} = 48. \tag{19}$$

Enfin, il est facile de voir que $k_{2,2,2}$ et $h_{2,2,2}$ devront être divisibles par 3. En effet, concevons que l'on désigne simplement par la lettre P l'une des substitutions qui, étant de la forme $P_{3,3}$, n'altèrent pas la valeur de Ω, et supposons un instant que Ω ne soit pas non plus altéré par une certaine substitution $\mathfrak{P}$ de la forme $P_{2,2,2}$. Les deux substitutions P, $\mathfrak{P}$ ne pourront être permutables entre elles. Car si l'on avait

$$P\mathfrak{P} = \mathfrak{P}P,$$

alors, d'après ce qui a été dit dans la séance du 1er décembre, p. 1197 [1], $\mathfrak{P}$ et P seraient de la forme

$$\mathfrak{P} = s^3, \qquad P = s^2,$$

s étant une substitution circulaire du sixième ordre; et comme, en vertu de la formule

$$s = s^3 s^{-2} = \mathfrak{P}P^{-1},$$

s serait une dérivée des deux substitutions $\mathfrak{P}$, P, la substitution s devrait être elle-même du nombre de celles qui n'altéreraient pas la valeur de Ω. Cette conclusion étant incompatible avec l'équation

$$h_6 = 0,$$

précédemment établie, on peut affirmer que la substitution $\mathfrak{P}$ ne sera

[1] *OEuvres de Cauchy*, S. I, T. IX, p. 439-440.

pas permutable avec P. Par la même raison, $\mathfrak{P}$ ne saurait être permutable avec la substitution P^2, qui est régulière et du troisième ordre, comme la substitution P. Donc, si l'on pose

$$\mathfrak{P}' = P\mathfrak{P}P^{-1}, \qquad \mathfrak{P}'' = P^2\mathfrak{P}P^{-2}, \tag{20}$$

on obtiendra pour $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ deux substitutions distinctes de $\mathfrak{P}$. D'ailleurs chacune d'elles, étant semblable à $\mathfrak{P}$, et par conséquent de la forme $P_{2,2,2}$, ne pourra être permutable avec la substitution $\mathfrak{P}$. Donc la substitution $\mathfrak{P}''$, évidemment liée à $\mathfrak{P}'$ par la formule

$$\mathfrak{P}'' = P\mathfrak{P}'P^{-1}, \tag{21}$$

sera encore distincte de la substitution $\mathfrak{P}'$. Ce n'est pas tout : comme on tire des formules (20)

$$P\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'P, \qquad \mathfrak{P}'P = \mathfrak{P}''P, \qquad P\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}P, \tag{22}$$

nous devons conclure que, si parmi les substitutions

$$1, \quad P, \quad Q, \quad R, \quad \ldots,$$

qui n'altèrent pas la valeur de Ω, quelques-unes,

$$\mathfrak{P}, \quad \mathfrak{P}', \quad \mathfrak{P}'', \quad \ldots, \tag{23}$$

sont de la forme $P_{2,2,2}$, celles-ci, prises trois à trois, vérifieront des équations semblables aux équations (22); et comme évidemment deux systèmes de cette forme ne peuvent renfermer la même substitution $\mathfrak{P}$, sans se confondre l'un avec l'autre, il en résulte que le nombre $h_{2,2,2}$ des termes compris dans la série (23) devra être divisible par 3. Donc le nombre $k_{2,2,2}$, lié au nombre $h_{2,2,2}$ par la formule

$$5k_{2,2,2} = 4h_{2,2,2},$$

devra être divisible, non seulement par 4, mais aussi par 3, et, en conséquence, par 12. Donc, puisque le produit $8k_{3,3}$ doit être égal ou supérieur à 24, l'équation (19), de laquelle on tirera

$$3k_{2,2,2} = 48 - 8k_{3,3} \overline{\overline{<}} 24,$$

$$k_{2,2,2} \overline{\overline{<}} 8,$$