PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

III.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

(SUITE.)

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

277.

Analyse mathématique. — *Mémoire sur l'emploi des variables complémentaires dans le développement des fonctions en séries.*

C. R., T. XX, p. 280 (3 février 1845).

On appelle, en Arithmétique, *nombres complémentaires* [1] deux nombres dont la somme est une unité d'un certain ordre; et l'on dit de même, en Géométrie, que deux angles sont *compléments* l'un de l'autre, lorsque leur somme équivaut à un angle droit. En transportant cette locution dans l'analyse algébrique, nous appellerons *variables complémentaires* deux variables dont la somme sera l'unité. L'objet de ce Mémoire est de montrer les grands avantages que présente l'em-

[1] En étendant cette définition, on a dit encore que deux nombres étaient *compléments* l'un de l'autre, quand ils offraient pour somme un nombre donné. L'usage des compléments dans les opérations de l'Arithmétique est l'objet spécial d'un Ouvrage publié en 1823 par M. Berthevin. En parcourant dernièrement cet Ouvrage, j'y ai trouvé, pour le calcul abrégé du produit de deux nombres, quelques règles dont chacune coïncide au fond avec celle que j'ai rapportée dans le *Compte rendu* de la séance du 16 novembre 1840 [page 795 [a]], et qui s'y trouve exprimée en termes tellement simples que, pour la démontrer, il suffirait de traduire son énoncé en formule algébrique.

[a] *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. V, p. 431.

ploi des variables complémentaires dans le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances entières, positives, nulle et négatives, d'une ou de plusieurs variables.

Analyse.

§ I. — *Considérations générales.*

Soit

$$x = r\,e^{p\sqrt{-1}}$$

une variable imaginaire dont r désigne le module et p l'argument. Nommons y une autre variable liée à x par l'équation

$$x + y = 1. \tag{1}$$

Je dirai que les deux variables x, y, dont la somme est l'unité, sont *complémentaires* l'une de l'autre. Soit maintenant

$$z = \frac{y}{x} \tag{2}$$

le rapport des deux variables complémentaires y et x. On tirera des équations (1) et (2), non seulement

$$y = 1 - x; \qquad z = \frac{1}{x} - 1, \tag{3}$$

mais encore

$$x = 1 - y, \qquad \frac{1}{x} = 1 + z. \tag{4}$$

Or il suit évidemment des formules (4) que toute fonction entière de x et de $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire tout polynôme composé de termes proportionnels à des puissances entières, positives, nulle et négatives de x, pourra être transformé en une fonction entière des deux variables y, z; et, réciproquement, il suit des formules (3) que toute fonction entière des deux variables z, y pourra être transformée en un semblable polynôme. Donc, lorsqu'une fonction $F(x)$ de la variable x aura été développée suivant les puissances entières, positives, nulle et négatives de cette variable, il suffira de recourir aux équations (4) pour transformer ce développement en une série ordonnée suivant les puissances entières, mais positives de y, z. Si, au contraire, par un moyen quelconque, on est parvenu à développer $F(x)$ en une série simple, ou même en une série double, ordonnée suivant les puissances entières, mais positives de y et z, il suffira de recourir aux équations (3) pour transformer cette série en un développement ordonné suivant les puissances entières, positives, nulle et négatives de la variable x. Il y a plus : on doit étendre cette remarque au cas où la fonction $F(x)$ serait développable en une série ordonnée suivant des puissances fractionnaires ou irrationnelles des variables y, z; ce qui arriverait, par exemple, si $F(x)$ pouvait être considérée comme le produit d'un facteur équivalent à une puissance positive ou négative, fractionnaire ou irrationnelle de la variable y, par un autre facteur développable en série ordonnée suivant les puissances entières et positives des deux variables y, z.

Il arrive souvent que le développement de la fonction $F(x)$ en une série ordonnée suivant les puissances entières de la variable x exige de longs calculs, et qu'il est, au contraire, facile de développer cette fonction en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable complémentaire y, et du rapport z ou $\frac{y}{x}$ de ces deux variables. Alors les transformations que nous venons de mentionner deviennent très utiles, et, par conséquent, la considération de la variable complémentaire fournit le moyen d'abréger notablement le travail.

D'ailleurs les formules que fournissent les diverses transformations dont nous venons de parler subsistent seulement sous certaines conditions et supposent évidemment la convergence des séries transformées. Il est essentiel de connaître ces conditions, et c'est pour y parvenir que nous avons établi la plupart des théorèmes énoncés dans la dernière séance. Nous allons, dans le paragraphe suivant, présenter quelques observations qui permettront d'introduire dans notre analyse une précision plus grande, et de donner aux théorèmes dont il s'agit une extension nouvelle.

§ II. — *Théorèmes généraux.*

Dans le Mémoire que renferme le *Compte rendu* de la séance du 20 janvier dernier, nous avons établi le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Soit*

$$x = r\, e^{p\sqrt{-1}}$$

une variable imaginaire dont p *désigne l'argument. Soit encore* $\mathrm{F}(x)$ *une fonction de* x *qui se décompose en deux facteurs représentés, l'un par* $\varpi(x)$, *l'autre par* $\mathrm{f}(y)$, y *étant lui-même fonction de* x; *et supposons que* $\mathrm{f}(y)$ *reste fonction continue de* y *pour tout module de* y *qui ne surpasse pas une certaine limite* y. *Enfin, soit* A_n *le coefficient de* x^n *dans le développement de* $\mathrm{F}(x)$ *en série ordonnée suivant les puissances entières de* x; *et posons*

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{\mathrm{y}}.$$

Au développement de $\mathrm{f}(y)$ *en série ordonnée suivant les puissances entières et ascendantes de* y *correspondra un développement de* A_n *qui sera convergent si la valeur trouvée de* Y *rend convergente la série modulaire qui correspond au développement de l'intégrale*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n}\,\frac{\varpi(x)}{1-\mathrm{Y}y}\,dp \tag{1}$$

suivant les puissances entières et ascendantes de Y.

Corollaire I. — Supposons maintenant que $\varpi(x)$ reste fonction continue de x, pour tout module de x inférieur à une certaine limite x. Concevons d'ailleurs que la valeur de n soit positive, la lettre n représentant un nombre entier quelconque, et que le développement de $\mathrm{F}(x)$ en série ait été effectué pour un module r de x inférieur à x, mais très peu différent de x. Enfin prenons

$$y = 1 - x.$$

L'intégrale (1), dans laquelle on devra supposer le module r de x inférieur à la limite x, deviendra

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n}\frac{\varpi(x)}{1-\mathrm{Y}+x\mathrm{Y}}\,dp, \tag{2}$$

et, en raisonnant comme à la page 134 ([1]), on prouvera que le développement de l'intégrale (2) en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de Y est convergent avec la série modulaire correspondante quand Y vérifie la condition

$$\mathrm{Y} < 1.$$

Corollaire II. — Concevons à présent que l'on prenne, non plus

$$y = 1 - x,$$

mais

$$y = \frac{1-x}{x}.$$

L'intégrale (1) deviendra

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{-n+1}\frac{\varpi(x)}{(1+\mathrm{Y})x-\mathrm{Y}}\,dp. \tag{3}$$

Or, si le rapport

$$\frac{\mathrm{Y}}{1+\mathrm{Y}}$$

est inférieur à la limite x, la valeur de l'intégrale (3), comme on l'a déjà remarqué (page 135) ([2]), sera ce que devient l'expression

$$\frac{\varpi(x)-\varpi(0)-\dfrac{x}{1}\varpi'(0)-\ldots-\dfrac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varpi^{(n-1)}(0)}{(1+\mathrm{Y})x^n}$$

quand on y pose

$$x = \frac{\mathrm{Y}}{1+\mathrm{Y}}.$$

Donc, par suite, pour que le développement de l'intégrale (3), suivant les puissances entières et ascendantes de Y, reste convergent avec la série modulaire correspondante, il suffira que le développement de la

([1]) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VIII, p. 431.
([2]) *Ibid.*, p. 432.

fonction

$$\varpi\left(\frac{Y}{1+Y}\right),$$

suivant les puissances entières et ascendantes de Y, reste lui-même convergent avec la série modulaire qui correspond à ce dernier développement. La condition que nous venons d'énoncer doit être généralement substituée aux conditions (9) de la page 135 ([1]), et s'accorde d'ailleurs avec elles dans le cas spécial que nous avions particulièrement en vue, c'est-à-dire dans le cas où $\varpi(x)$ se réduit à une puissance positive ou négative de $1-x$. En effet, si, pour fixer les idées, on pose, comme dans le *Compte rendu* de la séance du 27 janvier (page 217) ([2]),

$$\varpi(x) = (1-x)^{-s}, \tag{4}$$

on en conclura

$$\varpi\left(\frac{Y}{1+Y}\right) = (1+Y)^s,$$

et il est clair que le développement de

$$(1+Y)^s,$$

suivant les puissances ascendantes de Y, sera convergent avec la série modulaire correspondante, quand Y vérifiera la condition

$$Y < 1.$$

D'autre part, lorsque l'on pose

$$\varpi(x) = (1-x)^{-s},$$

la limite x se réduit à l'unité, ce qui fait disparaître la première des conditions (9) en la réduisant à la formule

$$Y < \infty.$$

Ajoutons que, en vertu des observations précédentes, le théorème II de la page 137 ([3]) subsistera, non seulement quand la valeur de $\varpi(x)$

([1]) *OEuvres de Cauchy*, S. I, T. VIII, p. 432.
([2]) *Ibid.*, p. 440.
([3]) *Ibid.*, p. 434.

sera donnée par l'équation (4), mais encore dans le cas contraire, si, d'ailleurs, la valeur de Y rend convergente la série modulaire qui correspond au développement de la fonction

$$\varpi\left(\frac{Y}{1+Y}\right)$$

suivant les puissances entières et ascendantes de Y. Il y a plus : on pourra supposer, dans ce théorème, comme au commencement de ce paragraphe, que $\varpi(x)$ reste fonction continue de x seulement pour tout module de x inférieur à x, et que A_n représente le coefficient de x^n dans le développement de $F(x)$, calculé pour un module de x inférieur à la limite x, mais très peu différent de cette limite. En conséquence, on pourra énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Soit*

$$x = re^{p\sqrt{-1}}$$

une variable imaginaire dont r *désigne le module et* p *l'argument. Soient, de plus,* $\varpi(x)$ *une fonction de* x *qui reste continue pour tout module de* x *inférieur à une certaine limite* x, *et* $f(y, z)$ *une fonction de* y, z *qui demeure continue pour tous les modules de* y, z *qui ne surpassent pas certaines limites* y, z. *Faisons d'ailleurs*

$$Y = \frac{1}{\text{y}}, \qquad Z = \frac{1}{\text{z}},$$

et nommons $F(x)$ *une fonction de* x *déterminée par le système des équations*

$$F(x) = \varpi(x)\, f(y, z), \tag{5}$$

$$y = 1 - x, \qquad z = \frac{1-x}{x}, \tag{6}$$

en sorte que, dans l'équation (5), x, y *représentent deux variables complémentaires, et* z *le rapport de ces variables. Enfin supposons que, pour un module de* x *inférieur à la limite* x, *mais très peu différent de cette limite, on ait développé la fonction* $F(x)$ *suivant les puissances entières, positives, nulle et négatives de* x, *et que, la lettre* n *désignant un nombre entier quelconque, on représente par* A_n *le coefficient de* x^n *dans le déve-*

loppement de $F(x)$. *Alors, au développement de* $f(y, z)$ *suivant les puissances entières et ascendantes de* y, z, *répondra un développement de* A_n *qui sera convergent avec la série modulaire correspondante si les valeurs de* Y, Z *vérifient la condition*

$$Y + Z < 1, \tag{7}$$

et si, d'ailleurs, la valeur trouvée de Y *rend convergente la série modulaire qui correspond au développement de*

$$\varpi\left(\frac{Y}{1+Y}\right)$$

suivant les puissances entières et ascendantes de Y.

En partant du théorème qui précède et en raisonnant comme nous l'avons fait dans le Mémoire du 27 janvier (page 213, etc.) ([1]), on établira la proposition suivante, qui se trouvera substituée au théorème II de la page 216 ([2]).

THÉORÈME III. — *Soit* $\varpi(x)$ *une fonction de* x *qui reste continue, par rapport à la variable* x, *pour tout module de* x *inférieur à une certaine limite* x. *Soit, de plus,* $f(y, z)$ *une fonction de* y, z *qui reste continue, par rapport à* y *et* z, *tant que le module de* y *ne surpasse pas une certaine limite* y, *ni le module de* z *une certaine limite* z. *Faisons d'ailleurs*

$$Y = \frac{1}{\mathrm{y}}, \qquad Z = \frac{1}{\mathrm{z}},$$

et nommons $F(x)$ *une fonction de* x, *déterminée par le système des équations*

$$F(x) = \varpi(x)\, f(y, z),$$

$$y = 1 - x, \qquad z = \frac{1-x}{x}.$$

Supposons que, pour un module de x *inférieur à la limite* x, *mais très peu différent de cette limite, on ait développé la fonction* $F(x)$ *suivant les puissances entières, positives, nulle et négatives de* x; *désignons par* n,

([1]) *OEuvres de Cauchy*, S. I, T. VIII, p. 435, etc.
([2]) *Ibid.*, p. 439.