Cambridge University Press
978-1-108-00274-5 - Oeuvres Completes, Volume 8
Augustin Louis Cauchy
Excerpt
More information

PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

III.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

(SUITE.)

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

216.

Analyse mathématique. — *Note sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances entières positives et négatives des variables.*

C. R., T. XVII, p. 193 (31 juillet 1843).

Les développements des fonctions suivant les puissances entières et positives des variables dont elles dépendent ne subsistent généralement que pour des modules des variables qui ne dépassent pas certaines limites indiquées par un théorème général que j'ai donné dans mes précédents Mémoires. Lorsque ces limites sont dépassées, les développements, pour demeurer convergents, doivent changer de forme et renfermer, non seulement les puissances entières et positives des variables, mais encore leurs puissances entières et négatives, quelquefois les puissances négatives seules. Il arrive même, en général, que les modules des variables venant à croître indéfiniment, les développements, pour rester convergents, doivent changer plusieurs fois de forme. Concevons, pour fixer les idées, que l'on considère une fonction rationnelle d'une seule variable x, et rangeons par ordre de grandeur les modules des diverses racines de l'équation auxiliaire qu'on obtient en égalant la fonction à $\frac{1}{0}$. Le module de la variable x pourra être, ou inférieur au premier, c'est-à-dire au plus petit des modules calculés, ou compris entre le premier et le second, ou compris entre le second et le troisième, etc., ou enfin supérieur au dernier, c'est-à-dire au plus grand module. Cela posé, dans chacun des cas dont il s'agit, la fonction rationnelle donnée pourra être développée en une série dont les divers termes seront proportionnels à des puissances entières de x. Mais le développement, pour demeurer convergent, devra changer de forme dans le passage du premier cas au second, du second cas au troisième, du troisième au quatrième, etc. Dans le premier cas, le développement devra renfermer uniquement les puissances entières et positives de la variable. Dans chacun des autres cas, il admettra en outre des puissances négatives, mais avec des coefficients qui changeront de valeurs quand on passera d'un cas à un autre; et même dans le dernier cas, c'est-à-dire lorsque le module de la variable deviendra supérieur au plus grand des modules calculés, les termes proportionnels à des puissances positives de la variable disparaîtront ou se réduiront à ceux qu'on obtient quand, après avoir réduit la fonction donnée à une seule fraction rationnelle, on divise algébriquement le numérateur de cette fraction rationnelle par son dénominateur.

Ce que nous venons de dire suffit pour montrer que la théorie du développement des fonctions en séries de termes proportionnels aux puissances entières des variables ne doit pas être restreinte au cas où ces puissances sont toutes positives, mais qu'au contraire cette théorie, qui s'applique avec succès à un si grand nombre de questions diverses, doit embrasser le cas où les puissances sont de deux espèces, savoir, les unes positives, les autres négatives.

On démontre facilement que, dans le cas où une fonction de la variable x est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, elle offre un seul développement de cette espèce. Même cette proposition est un théorème fondamental sur lequel repose, dans l'analyse algébrique, la théorie des suites. Il importait de voir si le même théorème continue de subsister dans les divers cas où les termes du développement deviennent proportionnels, les uns à des puissances positives, les autres à des puissances négatives de la variable, et si l'on peut alors donner encore de ce théorème une démonstration en quelque sorte élémentaire. Une telle démonstration me paraissait d'autant plus désirable que celle qui s'applique aux développements ordonnés suivant les puissances positives d'une variable se trouve alors en défaut, et que, d'un autre côté, le théorème, une fois démontré généralement, entraîne comme conséquence immédiate d'autres propositions fort utiles dans la haute Analyse, par exemple les théorèmes de Lagrange, de Laplace et de Paoli, sur les développements des racines des équations algébriques et transcendantes ou des sommes de ces racines, en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes d'un paramètre que renferment ces équations. En m'occupant de ces recherches, j'ai reconnu que le théorème ci-dessus mentionné subsistait seulement sous certaines conditions, et je suis parvenu à démontrer fort simplement une proposition générale dont voici l'énoncé :

Si deux développements d'une même fonction de la variable x, en série de termes proportionnels aux puissances entières positives et négatives de cette variable, demeurent égaux entre eux, pour toutes les valeurs de x qui offrent un module donné, ils seront identiquement égaux, en sorte que les coefficients des puissances semblables de x resteront les mêmes dans les deux développements.

La démonstration de ce théorème est l'objet de la Note que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie.

Analyse.

Soit

$$(1)\qquad \ldots,\ a_{-m}x^{-m},\ \ldots,\ a_{-2}x^{-2},\ a_{-1}x^{-1},\ a_0,\ a_1x^1,\ a_2x^2,\ \ldots,\ a_nx^n,\ \ldots$$

une série composée de termes proportionnels aux puissances entières positives et négatives de x. Cette série, qui pourra se prolonger indéfiniment dans les deux sens, sera *convergente*, si, pour des valeurs croissantes des nombres entiers m et n, la somme

$$(2)\quad a_{-m+1}x^{-m+1}+\ldots+a_{-2}x^{-2}+a_{-1}x^{-1}+a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$$

s'approche indéfiniment d'une limite fixe s. La série sera *divergente* dans le cas contraire.

Si la série (1) est convergente, on pourra en dire autant des deux séries

$$\begin{array}{lll} a_{-m}x^{-m}, & a_{-m-1}x^{-m-1}, & \ldots, \\ a_n x^n, & a_{n+1}x^{n+1}, & \ldots. \end{array}$$

Nommons r_{-m} et r_n les sommes de ces deux dernières, en sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} r_{-m} &= a_{-m}x^{-m} + a_{-m-1}x^{-m-1} + \ldots, \\ r_n &= a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots. \end{aligned}$$

Pour obtenir la somme s de la série (1), il suffira évidemment d'ajouter à la somme (2) les sommes r_{-m} et r_n. Donc la somme (2) se trouvera représentée par $s - r_{-m} - r_n$, en sorte qu'on aura

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} s - r_{-m} - r_n = {} & a_{-m+1}x^{-m+1} + \ldots + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} \\ & + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}. \end{aligned} \right.$$

Soit maintenant l un nombre entier égal ou supérieur à chacun des nombres m, n. Soit, de plus, x un module déterminé de la variable x, et supposons que, dans la formule (3), on remplace successivement la variable x par les diverses racines de l'équation binôme

$$x^l = \mathrm{x}^l.$$

On obtiendra ainsi l valeurs différentes de s. Nommons ς la moyenne arithmétique entre ces valeurs, c'est-à-dire leur somme divisée par l. Nommons pareillement

$$\rho_{-m}$$

la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs de r_{-m}, et

$$\rho_n$$

la moyenne arithmétique entre les valeurs de r_n. Comme la somme des valeurs de x^k sera nulle pour toutes les valeurs de k comprises dans la suite

$$-m+1, \quad \ldots, \quad -2, \quad -1, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n-1,$$

on aura évidemment

$$\varsigma - \rho_{-m} - \rho_n = a_0. \tag{4}$$

Supposons à présent que la série (1) reste convergente pour toutes les valeurs de x dont le module est x. Alors, en faisant croître indéfiniment les nombres entiers m, n, on fera converger les valeurs de

$$r_{-m}, \quad r_n$$

et, par suite, celles de

$$\rho_{-m}, \quad \rho_n$$

vers la limite zéro. Donc, en passant aux limites, on tirera de l'équation (4)

$$a_0 = \varsigma. \tag{5}$$

Si la somme s s'évanouit pour toutes les valeurs de x dont le module est x, on pourra en dire autant de ς, et, par suite, l'équation (5) se trouvera réduite à

$$a_0 = 0.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lemme. — *Si une série, composée de termes proportionnels aux puissances entières positives et négatives d'une variable x, reste convergente et présente une somme nulle pour toutes les valeurs de x qui offrent un module donné, le terme constant de cette série sera identiquement nul.*

Corollaire I. — Une série convergente ne cesse pas de l'être quand on multiplie tous ses termes par un même facteur, et alors la somme de la série se trouve elle-même multipliée par ce facteur. Si la série (1) est celle dont il s'agit, il suffira de réduire le facteur à $x^{\mp n}$ pour que le terme $a_{\pm n} x^{\pm n}$ se transforme en un terme constant

$$a_{\pm n}.$$

Si d'ailleurs la somme de la série (1) est nulle, le produit de cette somme par $x^{\mp n}$ sera encore nul. Donc, sous les conditions énoncées, le coefficient a_n ou a_{-n} de la puissance x^n ou x^{-n}, dans un terme quelconque de la série (1), sera identiquement nul, aussi bien que le terme constant a_0.

Corollaire II. — Soit maintenant

$$(6) \quad b_{-m}x^{-m}, \quad \ldots, \quad b_{-2}x^{-2}, \quad b_{-1}x^{-1}, \quad b_0, \quad b_1 x, \quad b_2 x^2, \quad \ldots, \quad b_n x^n, \quad \ldots$$

une nouvelle série semblable à la série (1), et posons généralement, pour des valeurs entières quelconques, positives ou négatives de k,

$$(7) \qquad b_k - a_k = c_k.$$

Si les séries (1) et (6) sont convergentes et présentent constamment la même somme pour toutes les valeurs de x qui offrent un module donné, alors, pour ces mêmes valeurs de x, la somme de la série

$$(8) \quad c_{-m}x^{-m}, \quad \ldots, \quad c_{-2}x^{-2}, \quad c_{-1}x^{-1}, \quad c_0, \quad c_1 x, \quad c_2 x_2, \quad \ldots, \quad c_n x^n, \quad \ldots$$

sera constamment nulle, et, par suite, en vertu du corollaire I, le coefficient c_k de x^k, dans un terme quelconque de la série (8), sera constamment égal à zéro. Donc, par suite, eu égard à l'équation (7), on aura constamment

$$b_k = a_k,$$

et ainsi se trouvera vérifié le théorème dont la démonstration était l'objet de la présente Note.

217.

Rapport sur le concours de 1842, relatif au grand prix de Mathématiques.

C. R., T. XVII, p. 201 (31 juillet 1843).

L'Académie avait proposé comme sujet de prix la question suivante :

Trouver les équations aux limites que l'on doit joindre aux équations *indéfinies pour déterminer complètement les maxima et minima des intégrales multiples.*

Elle avait demandé en outre des *applications relatives aux intégrales triples*.

Des quatre Mémoires qui ont été adressés à l'Académie avant l'expiration du concours, deux ont été particulièrement distingués par les Commissaires, savoir : le n° 3, dont l'épigraphe est : *A force d'étudier un sujet sous toutes sortes de faces, on finit par en tirer quelque chose*, et le Mémoire n° 2.

Les Commissaires ont jugé :

1° Que l'auteur du Mémoire n° 3, en établissant, à l'aide d'un nouveau signe, appelé par lui *signe de substitution*, des formules élégantes et générales qui fournissent, sous une forme convenable, les variations des intégrales multiples, et qui permettent de leur appliquer, dans tous les cas, l'intégration par parties, a contribué d'une manière notable au perfectionnement de l'Analyse, et mérité ainsi le grand prix de Mathématiques;

2° Que l'auteur du Mémoire n° 2, sans donner à ses calculs toute la généralité désirable, a néanmoins, en raison de l'élégance de quelques-unes de ses formules, surtout en raison des applications qu'il en a faites et de ses recherches sur la distinction des maxima et minima, mérité une mention honorable.

Après la lecture de ce Rapport, M. le Président ouvre le billet cacheté annexé au Mémoire couronné. Ce billet contient le nom de M. F. Sarrus, doyen de la Faculté des Sciences de Strasbourg.

218.

Calcul différentiel. — *Mémoire sur l'Analyse infinitésimale.*

C. R., T. XVII, p. 275 (14 août 1843).

Les géomètres ont accueilli avec bienveillance la méthode que j'ai suivie pour l'exposition de l'Analyse infinitésimale et que j'ai développée, non seulement dans mon *Calcul différentiel*, mais aussi dans un Mémoire *Su i metodi analitici* que renferme le recueil publié à Milan et intitulé *Bibliotheca italiana*. Toutefois, il m'a semblé qu'on simplifierait encore cette exposition en donnant à la méthode elle-même un nouveau degré de précision et de clarté si, à la définition que j'ai adoptée pour les différentielles en général, on joignait la considération d'une variable dont la différentielle se réduirait à l'unité. Il ne sera pas inutile d'entrer à cet égard dans quelques détails.

Lorsque des variables sont liées entre elles par une ou plusieurs équations, alors, en vertu de ces équations mêmes, quelques-unes de ces variables deviennent fonctions des autres considérées comme indépendantes. Alors aussi des accroissements simultanément attribués aux diverses variables se trouvent liés entre eux et à ces variables par des équations nouvelles qui se déduisent immédiatement des équations données. Ajoutons que si, les accroissements des variables étant supposés infiniment petits, on néglige, vis-à-vis de ceux-ci, considérés comme infiniment petits du premier ordre, les infiniment petits des ordres supérieurs au premier, les nouvelles équations deviendront linéaires par rapport aux accroissements dont il s'agit. Leibnitz et les premiers géomètres qui se sont occupés de l'Analyse infinitésimale ont appelé *différentielles* des variables leurs accroissements infiniment petits, et ils ont donné le nom d'*équations différentielles* aux équations linéaires qui subsistent entre ces différentielles. Cette définition des différentielles et des équations différentielles a le grand avantage d'être très générale et de s'étendre à tous les cas possibles. Toutefois, pour ceux qui l'adoptent, les équations différentielles ne deviennent exactes que dans le cas où les différentielles s'évanouissent, c'est-à-dire dans le cas où ces équations mêmes disparaissent. A la vérité, l'inconvénient que nous venons de rappeler n'a point arrêté Euler, et ce grand géomètre, tirant la conséquence rigoureuse des principes généralement admis, a considéré les différentielles comme de véritables zéros qui ont entre eux des rapports finis. Mais d'autres géomètres non