PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

III.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

(SUITE.)

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

169.

CALCUL INTÉGRAL. — *Mémoire sur l'emploi du nouveau calcul, appelé calcul des limites, dans l'intégration d'un système d'équations différentielles.*

C. R., T. XV, p. 14 (4 juillet 1842).

§ I. — *Considérations générales.*

Soit donné, entre la variable indépendante t et les inconnues

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

un système d'équations différentielles de la forme

$$(1) \qquad D_t x = X, \qquad D_t y = Y, \qquad D_t z = Z, \qquad \ldots,$$

X, Y, Z, ... désignant des fonctions connues de

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t.$$

Soient d'ailleurs

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots$$

les valeurs nouvelles qu'acquièrent les inconnues

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots$$

quand la variable t acquiert une valeur nouvelle désignée par τ. Lorsqu'on remplacera

$$x \text{ par } \xi, \quad y \text{ par } \eta, \quad z \text{ par } \zeta, \quad \ldots,$$

une fonction donnée

$$\text{(2)} \qquad R = F(x, y, z, \ldots)$$

des inconnues $x, y, z, \ldots$ acquerra elle-même une valeur nouvelle représentée par

$$F(\xi, \eta, \zeta, \ldots);$$

et, si cette valeur nouvelle est développable par la formule de Taylor en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $\tau - t$, on aura

$$\text{(3)} \qquad F(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = R + \frac{\tau - t}{1} D_t R + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} D_t^2 R + \ldots.$$

Si dans l'équation (2) on remplace successivement la fonction $F(x)$ par chacune des inconnues

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots,$$

on obtiendra les formules

$$\text{(4)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= x + \frac{\tau - t}{1} D_t x + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} D_t^2 x + \ldots, \\ \eta &= y + \frac{\tau - t}{1} D_t y + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} D_t^2 y + \ldots, \\ \zeta &= z + \frac{\tau - t}{1} D_t z + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} D_t^2 z + \ldots, \end{aligned} \right.$$

qui représenteront les intégrales des équations (1), toutes les fois que les séries

$$\text{(5)} \qquad \left\{ \begin{array}{llll} x, & \frac{\tau - t}{1} D_t x, & \frac{(\tau - t)^2}{1.2} D_t^2 x, & \ldots, \\ y, & \frac{\tau - t}{1} D_t y, & \frac{(\tau - t)^2}{1.2} D_t^2 y, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right.$$

seront convergentes. C'est du moins ce que l'on peut aisément démontrer à l'aide d'un théorème général que j'ai donné sur le développement des fonctions en séries. Donc, pour établir l'existence des intégrales générales des équations (1), il suffira de prouver qu'on peut attribuer à $\tau - t$ un module assez petit pour rendre convergentes les séries (5), toutes comprises dans la série plus générale

$$(6)\qquad R,\quad \frac{\tau - t}{1} D_t R,\quad \frac{(\tau - t)^2}{1.2} D_t^2 R,\quad \ldots.$$

Donc, si l'on désigne par ι le module de $\tau - t$, et par

$$\mathfrak{I}_0,\quad \mathfrak{I}_1,\quad \mathfrak{I}_2,\quad \ldots$$

des limites supérieures aux modules des quantités

$$R,\quad \frac{1}{1} D_t R,\quad \frac{1}{1.2} D_t^2 R,\quad \ldots,$$

il suffira de prouver que le module ι peut devenir assez petit pour rendre convergente la série

$$(7)\qquad \mathfrak{I}_0,\quad \mathfrak{I}_1 \iota,\quad \mathfrak{I}_2 \iota^2,\quad \ldots.$$

Observons maintenant que, en vertu de la formule (2), jointe aux équations (1), on aura

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &D_t R = D_x F(x, y, z, \ldots) X + D_y F(x, y, z, \ldots) Y + \ldots,\\ &D_t^2 R = D_x^2 F(x, y, z, \ldots) X^2 + D_y^2 F(x, y, z, \ldots) Y^2 + \ldots\\ &\qquad + 2 D_x D_y F(x, y, z, \ldots) XY + \ldots\\ &\qquad + D_x F(x, y, z, \ldots) D_t X + D_y F(x, y, z, \ldots) D_t Y + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

en sorte que la valeur générale de $D_t^n R$ se composera de termes dont chacun sera le produit d'un nombre entier par une des dérivées partielles de divers ordres de la fonction $F(x, y, z, \ldots)$, et par des puissances des fonctions X, Y, Z, ... ou de leurs dérivées. Cela posé, soient

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \mathrm{z},\quad \ldots,\quad \mathrm{t}$$

les modules d'accroissements imaginaires attribués aux quantités variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad t,$$

et tellement choisis que, pour ces modules, ou pour des modules plus petits, les fonctions

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots, \quad F(x, y, z, \ldots),$$

modifiées en vertu de ces accroissements, restent continues par rapport aux arguments et aux modules des accroissements dont il s'agit. Soient encore

$$\mathfrak{X}, \quad \mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{Z}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{R}$$

les plus grands modules des fonctions

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots, \quad R = F(x, y, z, \ldots)$$

correspondants aux modules

$$\mathrm{x}, \quad \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}, \quad \ldots, \quad \mathrm{t}$$

des accroissements imaginaires attribués aux variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t.$$

En vertu du théorème établi dans la séance précédente ([1]), pour obtenir des limites

$$\mathfrak{I}_0, \quad \mathfrak{I}_1, \quad \mathfrak{I}_2, \quad \ldots$$

respectivement supérieures aux modules des quantités

$$R, \quad \frac{1}{1} D_t R, \quad \frac{1}{1.2} D_t^2 R, \quad \ldots,$$

il suffira de calculer ces quantités dans le cas particulier où l'on a

$$(9) \qquad \begin{cases} X = a x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots t^{-1}, \\ Y = b x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots t^{-1}, \\ Z = c x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots t^{-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(10) \qquad R = K x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots,$$

a, b, c, ... désignant des facteurs constants, puis d'attribuer aux variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t$$

et aux constantes

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad K$$

([1]) *Œuvres de Cauchy*, S. I, T. VI, p. 464. — Extrait n° 167.

les valeurs que détermine le système des formules

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} x = -\mathrm{x}, & y = -\mathrm{y}, & z = -\mathrm{z}, & \ldots, & t = -\mathrm{t}, \\ \mathrm{X} = \mathfrak{X}, & \mathrm{Y} = \mathfrak{Y}, & \mathrm{Z} = \mathfrak{Z}, & \ldots, & \mathrm{R} = \mathfrak{R}, \end{array}\right.$$

jointes aux équations (9) et (10). D'ailleurs, pour déduire la série (7) de la série (6), il suffira de joindre aux formules (11) la suivante

$$(12)\qquad \tau - t = \iota,$$

et, dans le cas particulier que l'on considère, la série (6) ne cessera pas de représenter le développement de

$$\mathrm{F}(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$$

correspondant aux valeurs de ξ, η, ζ, ... que fournit l'intégration des équations (1). Enfin, si le module ι de $\tau - t$ est assez petit pour que la série (7) soit convergente, il rendra convergente à plus forte raison la série (6). Donc, pour établir l'existence des intégrales générales des équations (1), et même pour obtenir une limite en deçà de laquelle la différence $\tau - t$ puisse varier sans que les intégrales cessent d'être développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières de cette différence, il suffit d'intégrer le système des équations auxiliaires

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}_t x = a\,x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots t^{-1}, \\ \mathrm{D}_t y = b\,x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots t^{-1}, \\ \mathrm{D}_t z = c\,x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots t^{-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si les fonctions

$$\mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z},\quad \ldots$$

ne renfermaient pas la variable t, alors, dans les valeurs de ces fonctions que déterminent les formules (9), on devrait évidemment supprimer le facteur t^{-1}. Donc alors les formules (9) deviendraient

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{X} = a\,x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots, \\ \mathrm{Y} = b\,x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots, \\ \mathrm{Z} = c\,x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

et les équations (13) se réduiraient aux suivantes :

$$(15)\quad \begin{cases} D_t x = a x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots, \\ D_t y = b x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots, \\ D_t z = c x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

§ II. — *Intégration des équations auxiliaires.*

Considérons le système des équations auxiliaires

$$(1)\quad \begin{cases} D_t x = a x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots t^{-1}, \\ D_t y = b x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots t^{-1}, \\ D_t z = c x^{-1} y^{-1} z^{-1} \ldots t^{-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dans lesquelles $a, b, c, \ldots$ désignent des quantités constantes. On en tirera

$$(2)\quad \frac{D_t x}{a} = \frac{D_t y}{b} = \frac{D_t z}{c} = \ldots,$$

puis, en intégrant la formule (2), et désignant par

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \ldots, \quad \tau$$

un nouveau système de valeurs correspondantes des quantités variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad t,$$

on trouvera

$$(3)\quad \frac{x-\xi}{a} = \frac{y-\eta}{b} = \frac{z-\zeta}{c} = \ldots.$$

Concevons maintenant que l'on représente la valeur commune de chacun des rapports qui constituent les divers membres de la formule (3) par la lettre 8, ou même par le rapport

$$\frac{8}{k},$$

k désignant une constante nouvelle que l'on pourra choisir arbitrairement. Alors la formule

$$(4)\qquad \frac{x-\xi}{a}=\frac{y-\eta}{b}=\frac{z-\zeta}{c}=\ldots=\frac{8}{\mathrm{k}}$$

donnera

$$(5)\qquad x=\xi+\frac{a}{\mathrm{k}}8,\qquad y=\eta+\frac{b}{\mathrm{k}}8,\qquad z=\zeta+\frac{c}{\mathrm{k}}8,\qquad \ldots;$$

et de ces dernières équations, combinées avec la formule (2), on conclura

$$\mathrm{D}_t 8=\mathrm{k}x^{-1}y^{-1}z^{-1}\ldots t^{-1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6)\qquad \frac{dt}{t}=xyz\ldots\frac{d8}{\mathrm{k}};$$

puis, en intégrant les deux membres de la formule (6), après avoir substitué à $x, y, z, \ldots$ leurs valeurs tirées des formules (5), on trouvera

$$(7)\qquad \mathrm{l}\left(\frac{t}{\tau}\right)=\int_0^{8}\left(\xi+\frac{a}{\mathrm{k}}\theta\right)\left(\eta+\frac{b}{\mathrm{k}}\theta\right)\left(\zeta+\frac{c}{\mathrm{k}}\theta\right)\ldots\frac{d\theta}{\mathrm{k}}.$$

Ainsi les intégrales des équations auxiliaires se trouvent représentées par les formules (5), la valeur de 8 étant déterminée par la formule (7). On pourrait, dans ces formules, réduire la constante k à l'unité; mais, pour rendre plus faciles les applications qu'il s'agit d'en faire, il sera mieux de ne pas supposer $\mathrm{k}=1$.

Si les équations auxiliaires se réduisaient aux suivantes

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}_t x=a\,x^{-1}y^{-1}z^{-1}\ldots,\\ \mathrm{D}_t y=b\,x^{-1}y^{-1}z^{-1}\ldots,\\ \mathrm{D}_t z=c\,x^{-1}y^{-1}z^{-1}\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

alors le premier membre de la formule (6) se réduirait simplement à la différentielle dt, et, à la place de l'équation (7), on obtiendrait celle-ci

$$(9)\qquad t-\tau=\int_0^{8}\left(\xi+\frac{a}{\mathrm{k}}\theta\right)\left(\eta+\frac{b}{\mathrm{k}}\theta\right)\left(\zeta+\frac{c}{\mathrm{k}}\theta\right)\ldots\frac{d\theta}{\mathrm{k}}.$$

§ III. — *Conséquences des formules établies dans les paragraphes précédents.*

Dans le cas particulier où le système des équations différentielles données se réduit au système des équations auxiliaires, et où l'on suppose en outre

$$\mathrm{R} = \mathrm{F}(x, y, z, \ldots) = \mathrm{K}x^{-1}y^{-1}z^{-1}\ldots,$$

non seulement on a, en vertu des formules (4) du § II,

$$(1) \qquad \xi = x - \frac{a}{\mathrm{k}}\,\mathrm{s}, \qquad \eta = y - \frac{b}{\mathrm{k}}\,\mathrm{s}, \qquad \zeta = z - \frac{c}{\mathrm{k}}\,\mathrm{s}, \qquad \ldots,$$

la valeur de s étant déterminée par la formule (7) du même paragraphe, qui peut être réduite à

$$\mathrm{l}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \int_0^{\mathrm{s}} \left[x + \frac{a}{\mathrm{k}}(\theta - \mathrm{s})\right]\left[y + \frac{b}{\mathrm{k}}(\theta - \mathrm{s})\right]\ldots\frac{d\theta}{\mathrm{k}},$$

ou, ce qui revient au même, à

$$(2) \qquad \mathrm{l}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \int_0^{\mathrm{s}} \left(x - \frac{a}{\mathrm{k}}\theta\right)\left(y - \frac{b}{\mathrm{k}}\theta\right)\ldots\frac{d\theta}{k},$$

mais aussi on a de plus

$$\mathrm{F}(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = \mathrm{K}\xi^{-1}\eta^{-1}\zeta^{-1}\ldots,$$

et, par conséquent, eu égard aux formules (1),

$$(3) \qquad \mathrm{F}(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = \mathrm{K}\left(x - \frac{a}{\mathrm{k}}\mathrm{s}\right)^{-1}\left(y - \frac{b}{\mathrm{k}}\mathrm{s}\right)^{-1}\left(z - \frac{c}{\mathrm{k}}\mathrm{s}\right)^{-1}\ldots.$$

Cela posé, concevons que, dans le cas général où les équations différentielles et la fonction $\mathrm{F}(x, y, z, \ldots)$ offrent des formes quelconques, on construise la série

$$(4) \qquad \mathrm{R}, \quad \frac{\tau - t}{1}\mathrm{D}_t\mathrm{R}, \quad \frac{(\tau - t)^2}{1.2}\mathrm{D}_t^2\mathrm{R}, \quad \ldots,$$

qui, d'après la formule de Taylor, devrait représenter le développement de

$$\mathrm{F}(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$$